Corso di Geometria e Algebra
Programma svolto
anno accademico 2018/2019

12 gennaio 2019

8/10, 11-13 aula A1.

1. Insiemi. Elementi. Sottoinsiemi. Operazioni sugli insiemi: intersezione, unione, complementare.
2. Insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$.
3. Insieme vuoto $\varnothing$.
4. $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.
5. $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.

11/10, 9-11 aula A1.

1. Prodotto cartesiano di insiemi.
2. Funzioni. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Esistenza della funzione inversa.
3. Simboli $\forall, \exists, \Rightarrow$.
4. Operazioni binarie su insieme. Prodotto e somma di numeri reali.
5. Somma in $\mathbb{R}^2$ e sue proprietà.
6. Prodotto fra uno scalare e un vettore di $\mathbb{R}^2$.

12/10, 11-13 aula A1.

1. L'insieme $\mathbb{R}^n$. Somma di vettori di $\mathbb{R}^n$. Prodotto di uno scalare per un vettore di $\mathbb{R}^n$.
2. Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare in $\mathbb{R}^n$.

3. Vettori geometrici nel piano e nello spazio. Insiemi $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^3$.
4. Fissata una origine $O \in \pi$ c'è una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano π e i vettori geometrici del piano: al punto $P \in \pi$ associo il vettore $\vec{OP}$ e al vettore $\vec{v}$ associo il punto $P = O + \vec{v}$.
5. Somma di vettori geometrici (regola del parallelogramma).
6. Prodotto di uno scalare per un vettore geometrico.
7. Siano dati due vettori geometrici $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$. Diciamo che essi sono *proporzionali* se esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che $\vec{w} = \lambda\vec{v}$. I due vettori geometrici $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione se e soltanto se sono proporzionali.

15/10, 11-13.

1. Equazione parametrica della retta.
2. Siano date due equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} r &: \ P = P_0 + \lambda\vec{v} \\ r' &: \ P = P_1 + \lambda\vec{w}. \end{aligned}$$

   Allora $r = r'$ se e solo se esistono numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{P_0P_1} = \alpha\vec{v} \text{ e } \vec{w} = \beta\vec{v}.$$

3. Giacitura di una retta.
4. Definizione di $\mathrm{Span}(\vec{v})$. $\mathrm{Span}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$.
5. Riferimenti cartesiani nel piano: $\mathcal{R} = O\vec{i}\vec{j}$.
6. Riferimenti cartesiani nello spazio: $\mathcal{R} = O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$.
7. Dato un riferimento $\mathcal{R} = O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, c'è una funzione biunivoca da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{E}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

18/10, 9-11.

1. Componenti di un vettore geometrico rispetto ad un riferimento fissato.
2. Coordinate di un punto rispetto ad un riferimento fissato.

3. Se $\vec{v}$ ha componenti $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{v}'$ ha componenti $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, allora $\vec{v} + \vec{v}'$ ha componenti $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.

4. Se $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, allora $P + \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \\ z + v_3 \end{pmatrix}$.

5. Equazione parametrica della retta in coordinate.

6. Combinazioni lineari di due vettori geometrici.

7. Spazio generato da due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

8. $\vec{0} \in \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

9. $\text{Span}(\vec{v}_1) \subset \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

10. Siano date due equazioni parametriche

$$\begin{aligned} r &: \; P = P_0 + \lambda \vec{v} \\ r' &: \; P = P_1 + \lambda \vec{w}. \end{aligned}$$

Allora $r \cap r' \neq \varnothing$ se e solo se $\overrightarrow{P_0 P_1} \in \text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$.

19/10, 11-13.

1. Se r è la retta di equazione parametrica $P = P_0 + t\vec{v}$, allora scriviamo

$$r = P_0 + \text{Span}(\vec{v}).$$

2. Se A, B, C sono tre punti del piano, allora $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Inoltre $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ e $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

3. Concetto di lista di vettori linearmente indipendente:
   (a) La lista $\{\vec{v}\}$ è linearmente indipendente se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
   (b) La lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ è linearmente indipendente se (1) $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ e (2) $\vec{v}_2 \notin \text{Span}(\vec{v}_1)$.
   (c) La lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è linearmente indipendente se (1) $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, (2) $\vec{v}_2 \notin \text{Span}(\vec{v}_1)$ e (3) $\vec{v}_3 \notin \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

4. Equazione parametrica del piano: $P = P_0 + s\vec{v} + t\vec{w} = P_0 + \text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$. Affinché questa sia l'equazione di un piano, i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ devono essere linearmente indipendenti.

5. Sia $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una lista linearmente indipendenti. Poniamo $\pi := O + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Allora la lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è linearmente indipendente se e solo se il terzo vettore $\vec{v}_3$ "esce" dal piano π.
6. Indipendenza lineare di liste di vettori in $\mathbb{R}^3$.
7. Una lista di vettori geometrici è linearmente indipendente se e solo se la lista formata dalle terne delle loro componenti è linearmente indipendente. Per esempio, siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vettori geometrici. E supponiamo che $\vec{v} = v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ e $\vec{w} = w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$. Allora la lista $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ è linearmente indipendente se e soltanto se è indipendente la lista
$$\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\}.$$
8. Giacitura di un piano o di una retta. Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa giacitura. Due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.
9. Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{E}^3$. Supponiamo $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$. Allora $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \subset \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$. In altre parole: se un vettore è combinazione lineare di due vettori che sono combinazioni lineari di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, allora il vettore è anche lui combinazione lineare di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$.

22/10, 11-13.

1. Siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vettori geometrici. Poniamo $W := \mathrm{Span}(\vec{v}_2, \vec{v}_2)$. Allora
   (a) $\vec{u}, \vec{u}' \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{u}' \in W$;
   (b) $\vec{u} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\vec{u} \in W$.
2. Sia $\pi = P_0 + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Se $P_1 \in \pi$, allora $\pi = P_1 + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
3. Siano date due equazioni parametriche di piani:
$$\pi = P_0 + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$
$$\pi' = P_1 + \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2).$$
   Allora $\pi = \pi'$ se e solo se $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, cioè le due giaciture coincidono e $P_0\vec{P}_1$ appartiene alla comune giacitura.
4. Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una lista linearmente indipendente, allora $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathbb{E}^3$. Ogni vettore $\vec{v} \in \mathbb{E}^3$ si può scrivere in modo unico nella forma
$$\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3.$$
5. Ortogonalità di vettori. Il vettore nullo è per definizione ortogonale a qualsiasi vettore.

6. Proiezione $\vec{v}'$ di un vettore $\vec{v}$ parallela a un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$.

7. Proiezione $\vec{v}''$ di un vettore $\vec{v}$ ortogonale a un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$.

8. La proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ (cioè parallela a $\vec{u}$) è il vettore

$$\vec{v}' := \frac{||\vec{v}|| \cdot \cos\theta}{||\vec{u}||}\vec{u}.$$

9. Il prodotto scalare fra due vettori geometrici.

25/10, 9-11.

1. Proprietà di linearità delle proiezioni: se $\vec{v}'$ è la proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{u}$ e $\vec{v}''$ è la proiezione ortogonale ad $\vec{u}$, allora

$$(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)' = \lambda_1 \vec{v}_1' + \lambda_2 \vec{v}_2',$$
$$(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)'' = \lambda_1 \vec{v}_1'' + \lambda_2 \vec{v}_2''.$$

2. Proprietà del prodotto scalare: bilinearità, simmetria, positività.

3. Fissato un riferimento cartestiano ortonormale $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ il prodotto scalare si può calcolare in termini delle componenti dei due vettori.

4. Dato un vettore non nullo $\vec{n}$ e un punto P_0, il piano ortogonale ad $\vec{n}$ e passante per P_0 è $\pi = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0\}$.

5. Equazione cartesiana del piano.

6. Due piani $\pi = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0\}$ e $\pi' = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{n}' \rangle = 0\}$ sono paralleli se e solo se i vettori normali $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ sono proporzionali.

7. Equazioni cartesiane della retta. L'intersezione di due piani π e π' è una retta se e solo se i due piani non sono paralleli se e solo se la lista $\{\vec{n}, \vec{n}'\}$ formata dai vettori normali è linearmente indipendente.

8. Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

descrive una retta se e solo se la lista

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\}$$

è linearmente indipendente.

26/10, 11-13.

1. Passaggio da equazioni parametriche a equazioni cartesiane per rette e piani.

2. Passaggio da equazioni cartesiane a equazioni parametriche per rette e piani.

3. Proiezione di un punto su una retta.

4. Proiezione di un punto su un piano.

5. Distanza di un punto da un piano. Se π ha equazione cartesiana $ax+by+cz+d=0$, e $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, allora
$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

6. Posizioni reciproche di rette. Siano $r = P_0 + \mathrm{Span}(\vec{u})$ e $r' = P_1 + \mathrm{Span}(\vec{v})$ due rette. Allora r ed r' sono parallele se e solo se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ è una lista linearmente dipendente.

7. Supponiamo che r ed r' non siano parallele, cioè che $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sia una lista linearmente indipendente. Allora ci sono due possibilità: se $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$, le rette sono incidenti, cioè $r \cap r' \neq \varnothing$. Se invece $\overrightarrow{P_0P_1} \notin \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$, cioè se la lista $\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_0P_1}\}$ è linearmente indipendente, allora le rette sono sghembe, cioè $r \cap r' = \varnothing$ ed r ed r' non sono parallele.

8. Due piani sono paralleli se e solo se i vettori normali sono proporzionali. Altrimenti si intersecano in una retta.

29/10, 11-13.

1. Spazi vettoriali astratti. Esempi. $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{R}^n$.

2. Esempio: se E è un insieme non vuoto e V è l'insieme di tutte le funzioni da E in $\mathbb{R}$, posso definire somma e prodotto per uno scalare su V. Con queste operazioni V è uno spazio vettoriale.

3. Polinomi. Grado di un polinomio. $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$.

4. L'insieme di tutti i polinomi con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare naturali è uno spazio vettoriale.

5. Regole di calcolo in uno spazio vettoriale
   - legge di cancellazione: se $u+v=u+w$, allora $v=w$;
   - $0 \cdot v = 0$;

- $(-1) \cdot v = -v$;
- $\lambda \cdot 0 = 0$;
- se $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$, allora $\lambda \cdot v \neq 0$.

6. Definizione di sottospazio vettoriale.

8/11, 9-11

1. Equazione cartesiana di un piano passante per 3 punti non allineati.

2. Equazione parametrica di un piano passante per 3 punti non allineati.

3. Esempi di sottospazi:

   (a) L'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Se l'equazione non è banale (cioè se i coefficienti non sono tutti nulli) tale insieme si chiama *iperpiano* di $\mathbb{R}^n$.

   (b) L'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

   (c) Sistemi lineari omogenei di k equazioni in n incognite.

   (d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4. Combinazioni lineari in uno spazio vettoriale astratto. Spazio generato.

5. Se $v_1, \ldots, v_k \in V$, allora $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ è un sottospazio vettoriale di V.

6. Le giaciture di rette e piani sono a sottospazi vettoriali di $\mathbb{E}^3_O$.

7. Se V è uno spazio vettoriale e $W \subset V$ è un sottospazio, allora presi $w_1, \ldots, w_k \in W$, ogni combinazione lineare $\lambda_, v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ appartiene ancora a W. Quindi i sottospazi sono "chiusi rispetto alla formazione di combinazioni lineari".

8. Lista di generatori di uno spazio vettoriale V.

9/11, 11-13

1. Per ogni spazio vettoriale V, i sottoinsiemi $\{0\}$ e V sono sottospazi di V.

2. Spazi vettoriali finitamente generati.

3. Lo spazio vettoriale dei polinomi non è finitamente generato.

4. Vettori linearmente indipendenti. Una lista $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente indipendente se tutti i vettori sono $\neq \underline{0}$ e nessuno di essi è combinazione lineare degli altri.

5. Data una lista di vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in uno spazio vettoriale le seguenti condizioni sono equivalenti:

A) $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una lista linearmente indipendente;

B) $v_1 \neq \underline{0}$,
$v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$,
$\dots$,
$v_k \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$,
$\dots$,
$v_n \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$.

C) Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono numeri reali e $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0}$, allora i numeri λ_i sono tutti nulli.

6. Base di uno spazio vettoriale V.

7. Coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base $\mathscr{B}$ di V: $[v]_{\mathscr{B}}$.

12/11, 11-13.

1. Algoritmo di estrazione.

2. Algoritmo di completamento. Se $\mathscr{L}$ è una lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale finitamente generato, allora posso scegliere una lista di vettori $\mathscr{L}'$ tale che $\mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$ sia una base.

3. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente, allora $\mathscr{L}$ contiene al più n elementi. Se $\mathscr{L}$ contiene esattamente n elementi, allora è una base.

4. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è un sistema di generatori di V, allora $\mathscr{L}$ contiene almeno n elementi. Se $\mathscr{L}$ contiene esattamente n elementi, allora è una base.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathscr{L}$ una lista di n vettori distinti di V. Allora $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente se e soltanto se è un sistema di generatori se e soltanto se è una base.

6. L'unione di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V in generale non è un sottospazio vettoriale di V.

7. Somma di due sottospazi.

8. Somma di k sottospazi: $W_1 + \cdots + W_k \subset V$.

9. Formula di Grassmann.

10. Se W e Z sono sottospazi di V, allora $\dim(W \cap Z) \geq \dim W + \dim Z - \dim V$.

15/11, 9-11.

1. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $W \subseteq V$ è un sottospazio, allora $\dim W \leq \dim V$. Se $\dim W = \dim V$, allora $W = V$.

2. Somma diretta di due o più sottospazi.

3. Sottospazio complementare.

4. Se $\dim W + \dim Z > \dim V$, allora $W \cap Z \neq \{0\}$.

5. Matrici $m \times n$, colonne A^j, righe A_i, elementi di posto (i, j), $A = (a_{ij})$.

6. Somma di matrici. Prodotto di uno scalare per una matrice. $M(m, n)$ è uno spazio vettoriale.

7. Se $A = (A^1 | \cdots | A^n)$ e
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$
definisco
$$A \cdot X := x_1 A^1 + \cdots x_n A^n.$$

8. Se A è $m \times n$ e B è $n \times k$ definisco
$$A \cdot B := (AB^1 | \cdots | AB^n).$$

9. Siano $A \in M(m, n)$ e $B \in M(n, k)$ e sia $C = A \cdot B$. Allora
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$
Per questo motivo si chiama prodotto righe per colonne.

16/11, 11-13

1. Siano $A, A' \in M(m, n)$ e $B \in M(n, k)$. Allora $(A + A')B = AB + A'B$.

2. Siano $A \in M(m, n)$ e $B, B' \in M(n, k)$. $A(B + B') = AB + AB'$.

3. Siano $A \in M(m, n)$, $B \in M(n, k)$ e $C \in M(k, p)$. Allora $(AB)C = A(BC)$.

4. In generale $AB \neq BA$.

5. $Ae_j = A^j$.

6. Il prodotto fra matrici permette di scrivere in forma compatta i sistemi lineari. Un sistema di m equazioni in n incognite corrisponde a una equazione della forma $AX = B$, dove $A \in M(m, n)$, $X \in \mathbb{R}^n$ (vettore delle incognite) e $B \in \mathbb{R}^m$.

7. Se $AX = B$ è un sistema quadrato (cioè A è $n \times n$) e A è invertibile, allora la soluzione del sistema è $X = A^{-1}B$.

8. La matrice identica I_n è l'elemento neutro della moltiplicazione di matrici.

9. Matrici invertibili. Definizione di $\mathrm{Gl}(n)$.

10. Se $n > 1$ è possibile trovare due matrici $A, B \in M(n)$ tali che $AB = 0$ e $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Un esempio è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

    Le matrici A e B non sono invertibili. Quindi mentre in $M(1) = \mathbb{R}$ tutti i numeri diversi da 0 sono invertibili, per $n \geq 2$ esistono matrici $A \in M(n)$ che non sono nulle, ma non sono invertibili.

11. L'inversa di una matrice invertibile è unica.

12. $I_n \in \mathrm{Gl}(n)$ e $(I_n)^{-1} = I_n$.

13. Se $A \in \mathrm{Gl}(n)$, anche $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n)$ e $(A^{-1})^{-1} = A$.

14. Se $A_1, A_2 \in \mathrm{Gl}(n)$, allora anche $A_1 \cdot A_2 \in \mathrm{Gl}(n)$

$$(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

15. Esempio: la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

19/11, 11-13.

1. Nucleo di una matrice $m \times n$: $\ker A$. È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2. Sistemi quadrati.

3. Sia $A \in M(n)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

    - $A \in \mathrm{Gl}(n)$.
    - Per ogni $B \in \mathbb{R}^n$ il sistema lineare $AX = B$ ha una unica soluzione.
    - $\ker A = \{0\}$.
    - Le colonne di A formano una base di $\mathbb{R}^n$.

4. Se $A \in \mathrm{Gl}(n)$ e $\mathscr{B} = \{A^1, \dots, A^n\}$, indico con $[x]_{\mathscr{B}}$ le coordinate del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Allora

$$A^{-1} = (B^1 | \cdots | B^n), \qquad \text{dove } B^j := [e_j]_{\mathscr{B}}.$$

(Con e_j si indicano come al solito i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.)

5. Se A è una matrice $n \times n$ indichiamo con A_{ij} o $A_{[ij]}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando da A la i-esima riga e la j-esima colonna.

6. Determinante di matrici 2×2.

7. Una matrice 2×2 è invertibile se e solo se ha determinate $\neq 0$.

8. Determinante di matrici 3×3.

9. Formula generale per il determinante di una matrice $n \times n$ sviluppando lungo la prima colonna.

10. Teorema di Laplace: si può sviluppare il determinante secondo una colonna qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la j-esima colonna è

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

11. Si può sviluppare il determinante secondo una riga qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la k-esima riga è

$$\det A = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+k} a_{kh} \det A_{kh}.$$

22/11, 9-11.

1. Matrici triangolari superiori e inferiori. Il loro determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

2. $\det I_n = 1$.

3. Proprietà del determinante:

4. Scambiando due colonne il determinante cambia di segno. Per esempio se $A = (A^1 | A^2 | A^3 | \cdots | A^n) \in M(n)$,

$$\det(A^2 | A^1 | A^3 | \cdots | A^n) = -\det A.$$

5. Se $A^j = 0$, allora $\det A = 0$.

6. $\det(\lambda A^1 | A^2 | \cdots | A^n) = \lambda \cdot \det A$. Lo stesso se moltiplico un'altra colonna invece di A^1.

7. $\det(C_1 + C_2|A^2|\cdots|A^n) = \det(C_1|A^2|\cdots|A^n) + \det(C_2|A^2|\cdots|A^n)$. Lo stesso se A^j (invece di A^1) è somma di due vettori.
8. Se sommo ad una colonna di A un multiplo di un'altra colonna, il determinante non cambia.
9. Se $A^i = A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.
10. Definizione di funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
11. Date $(n-1)$-colonne $A^2, \ldots, A^n$, la funzione

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(X) := \det(X|A^2|\cdots|A^n)$$

è lineare. Lo stesso vale per altre colonne.

12. Trasposizione di una matrice.
13. $\det A = \det(A^T)$.
14. Tutte le proprietà del determinante che valgono per colonne, valgono anche per le righe.
15. Calcolo del determinante. Se una colonna (o una riga) della matrice A è nulla, allora $\det A = 0$.
16. Algoritmo per il calcolo del determinante. Se la prima colonna è nulla abbiamo finito. Altrimenti esiste un elemento non nullo nella prima colonna. Supponiamo per semplicità che sia a_{11}. Allora per ogni $i = 2, \ldots, n$ sommo alla i-esima riga di A la prima riga moltiplicata per $-a_{i1}/a_{11}$. La matrice A' così ottenuta ha determinante uguale a quello di A ed è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

dove $B \in M(n-1)$. Sviluppando lungo la prima riga ottengo $\det A = \det A' = a_{11} \cdot \det B$. Procedo su B nello stesso modo.

23/10, 11-13

1. La trasposizione è lineare, ossia $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.
3. Teorema di Binet (senza dimostrazione).
4. In generale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

6. Se le colonne di A sono linearmente dipendeti, cioè se una delle colonne è combinazione lineare delle altre, allora $\det A = 0$.
7. Una matrice $A \in M(n)$ è invertibile se e soltanto se $\det A \neq 0$.
8. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$
9. Matrice cofattore. Formula di Cramer per la matrice inversa.
10. Teorema di Cramer per la risoluzione di sistemi quadrati non singolari (cioè $AX = B$ con A una matrice $n \times n$ invertibile).
11. Esempi di calcolo di determinante.

26/10, 11/13.

1. Dato un sistema di generatori di un sottospazio W ci sono in generale tanti modi di estrarre una base.
2. Sia $\mathscr{L}$ una lista di vettori di $\mathbb{R}^m$ e poniamo $W := \mathrm{Span}(\mathscr{L}) \subset \mathbb{R}^m$. Supponiamo che $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$ sia una sottolista con queste due proprietà: (1) $\mathscr{L}'$ è linearmente indipendente, (2) se aggiungo a $\mathscr{L}'$ qualche altro vettore di $\mathscr{L}$, la lista ottenuta non è più linearmente indipendente. Allora $\mathscr{L}'$ è una base di W.
3. Definizione di rango.
4. Se A è $m \times n$, $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.
5. Se $m \leq n$, allora $\mathrm{rg}\, A = m$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una lista di generatori di $\mathbb{R}^m$.
6. Se $m \geq n$, allora $\mathrm{rg}\, A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una lista linearmente indipendente.
7. Se $m = n$, allora $\mathrm{rg}\, A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.
8. Se scambio due colonne di una matrice il rango non cambia.
9. Se sommo a una colonna un multiplo di un'altra colonna, il rango non cambia.
10. Se moltiplico una colonna di una matrice per un numerno diverso da 0, il rango non cambia.
11. Se $m = n$, allora $\mathrm{rg}(A) = n$ se e solo se $\det A \neq 0$ se e solo se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.
12. Sottomatrici e minori.

13. Sia $A' \subset A$ una sottomatrice quadrata $p \times p$ e sia $\det A' \neq 0$. Allora $p \leq \mathrm{rg}(A)$.
14. $\mathrm{rg}(A) = \max\{r$: esiste un minore non nullo di A di ordine $r\}$.
15. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T) = \dim \mathrm{Span}(A_1, \ldots, A_m)$.
16. Le operazioni possiamo farle anche sulle righe.

29/11, 9-11.

1. Siano $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sia una lista linearmente indipendente e che invece $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ sia linearmente dipendente. Allora $v_{k+1} \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ e
$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k).$$
In questo caso diciamo che v_{k+1} è *superfluo*.
2. Sistemi lineari e loro scrittura matriciale. Matrice dei coefficienti. Vettore dei termini noti. Vettore delle incognite. Insieme delle soluzioni. Sistemi compatibili.
3. Matrice completa di un sistema lineare.
4. Teorema di Rouché-Capelli: Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbb{R}^m$. Allora il sistema lineare
$$AX = B$$
è compatibile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$, dove $\tilde{A} = (A|B)$. (Con dimostrazione.)
5. Due sistemi lineari sono detti equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
6. Operazioni su un sistema lineare che lo trasformano in un sistema equivalente.
7. Sistemi lineari a scala e loro risoluzione.
8. Metodo di Gauss per ridurre un sistema lineare ad un sistema equivalente a scala.
9. Rappresentazione parametrica delle soluzioni di un sistema lineare.
10. Conoscere una rappresentazione parametrica delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, equivale a conoscere una base di $\ker A$.
11. I Teorema di struttura: se A è una matrice $m \times n$, le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rg}\, A$. Questo sottospazio vettoriale viene chiamato nucleo di A ed è indicato con il simbolo $\ker A$.

30/11, 11-13.

1. Pivot. Il rango di una matrice a scale è il numero di pivot.
2. Varietà lineari o traslati (di sottospazi vettoriali). Se $W \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale e $X_0 \in \mathbb{R}^n$, allora il simbolo $X_0 + W$ indica l'insieme formato da tutti i vettori della forma $X_0 + v$ con $v \in W$. In altre parole
$$X_0 + W := \{X \in \mathbb{R}^n : X - X_0 \in W\}.$$
3. II Teorema di struttura: Se il sistema $AX = B$ è compatibile, allora l'insieme S delle soluzioni è un traslato di $\ker A$. Infatti data una qualunque soluzione $X_0 \in S$ si ha
$$S = X_0 + \ker A := \{X \in \mathbb{R}^n : X - X_0 \in \ker A\}.$$
In particolare S è un sottovarietà lineare di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rg}(A)$.
4. Esercizi sui sistemi lineari.
5. Sistemi lineari dipendenti da un parametro.

3/12, 11-13.

1. Applicazioni lineari fra spazi vettoriali.
2. Se $f : V \to W$ è lineare, dati $v_i \in V$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$, si ha
$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$
3. Le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le applicazioni L_A con A una matrice $m \times n$.
4. L_A è detta l'*applicazione lineare associata* alla matrice A.
5. La derivata come applicazione lineare.
6. Se $f : V \longrightarrow W$ è lineare e U è un sottospazio vettoriale di V, allora $f(U)$ è un sottospazio vettoriale di W. In particolare, $\mathrm{Im}\, f$ è un sottospazio vettoriale di W.
7. Nucleo.
8. Teorema delle dimensioni: se V ha dimensione finita, allora
$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V.$$
9. Se $f = L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, allora $\ker L_A = \ker A$, $\mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{Span}(A^1, \ldots, A^n)$ e $\dim \mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{rg}(A)$.

10. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono generatori di V e $f : V \to W$ è lineare, allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ sono generatori di $\operatorname{Im} f$.

11. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono vettori linearmente indipendenti di V e $f : V \to W$ è lineare, i vettori $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ NON sono necessariamente linearmente indipendenti.

12. Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

    (a) f è iniettiva.

    (b) $\ker f = \{0_V\}$.

    (c) Per ogni lista linearmente indipendente $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in V, la lista $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è linearmente indipendente.

13. Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare e sia $\mathscr{L} := \{v_1, \ldots, v_n\}$. Poniamo $\mathscr{L}' := \{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$. Se $\mathscr{L}$ è una lista linearmente dipendente, anche $\mathscr{L}'$ è linearmente dipendente. Se $\mathscr{L}'$ è una lista linearmente indipendente, anche $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente. Se L è iniettiva e $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente, allora anche $\mathscr{L}'$ è linearmente indipendente.

14. Sia A una matrice $m \times n$. Allora L_A è iniettiva se e solo se $\operatorname{rg}(A) = n$, mentre L_A è suriettiva se e solo se $\operatorname{rg}(A) = m$.

6/12, 9-11.

1. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono vettori linearmente dipendenti di V e $f : V \to W$ è lineare, i vettori $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ sono linearmente dipendenti.

2. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono vettori di V, $f : V \to W$ è lineare e i vettori $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ sono linearmente indipendenti, allora anche i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.

3. Una applicazione lineare e biunivoca si chiama isomorfismo.

4. Sia $L : V \longrightarrow W$ è una applicazione lineare. Supponiamo che esista una base $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V tale che la lista $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ sia una base di W. Allora L è un isomorfismo.

5. Viceversa se $L : V \longrightarrow W$ è un isomorfismo e $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una qualsiasi base di V, allora la lista $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ è una base di W.

6. Se $\dim V = \dim W$, allora una applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è un isomorfismo.

7. Se V ha dimensione n e $\mathcal{B}$ è una base di V, l'applicazione data dalle coordinate

$$[\bullet]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo.

8. Due spazi sono isomorfi (cioè esiste un isomorfismo fra di essi) se e solo se hanno la stessa dimensione.

9. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \ldots, w_n \in W$ dei vettori arbitrari. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ tale che $L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \ldots, n$.

10. Se $\dim V > \dim W$, non esistono applicazioni lineari iniettive $L : V \longrightarrow W$.

11. Se $\dim V < \dim W$, non esistono applicazioni lineari suriettive $L : V \longrightarrow W$.

12. Dimostrazione del teorema delle dimensioni.

7/12, 11-13.

1. Se $A \in M(m, n)$ e $B \in M(n, k)$, allora $L_A \circ L_B = L_{AB}$.

2. Controimmagine di un punto del codominio: se $f : X \to Y$ è una funzione e $y \in Y$, allora la controimmagine di y mediante f è il sottoinsieme

$$f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) = y\}.$$

3. Siano V e W spazi vettoriali di dimesione n ed m rispettivamente. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo $w_0 \in W$. Se $w_0 \notin \operatorname{Im} L$, allora $L^{-1}(w_0) = \varnothing$. Se invece $w_0 \in \operatorname{Im} L$, allora $L^{-1}(w_0) \neq \varnothing$ e $L^{-1}(w_0)$ è un traslato del nucleo, ossia fissato un qualsiasi elemento v_0 di $L^{-1}(w_0)$, si ha

$$L^{-1}(w_0) = \{v \in V : v - v_0 \in \ker L\} = v_0 + \ker L.$$

I teoremi di Rouché-Capelli e di struttura si possono interpretare come casi particolari di questo teorema.

4. Matrice associata ad una applicazione lineare: sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{D} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ di W. La *matrice associata* ad L rispetto a queste basi è la matrice che ha come j-esima colonna il vettore

$$[L(v_j)]_{\mathcal{D}}.$$

Questa matrice viene indicata col simbolo $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$. (Nel libro viene usato il simbolo $[[L]]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.) Se $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = A = (a_{ij})$, allora

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

5. Se A è una matrice $m \times n$ e $\mathscr{C}_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora
$$[L_A]^{\mathscr{C}_n}_{\mathscr{C}_m} = A.$$
6. Se $v \in V$ e $A = [L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, allora
$$[L(v)]_{\mathcal{D}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$
7. Supponiamo che V, W, Z siano spazi vettoriali e che $L : V \longrightarrow W$ ed $S : W \longrightarrow Z$ siano applicazioni lineari. Fissiamo basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ di V, W e Z rispettivamente. Allora
$$[S \circ L]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = [S]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}.$$
8. Se V è uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora la matrice $M := [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ viene chiamata *la matrice del cambiamento di base* da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Se $v \in V$ ha coordinate X rispetto a $\mathcal{B}$ e X' rispetto a $\mathcal{B}'$, allora
$$X = MX'.$$
9. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.
10. Sia $L : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V. Allora
$$[L]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} M$$
dove $M = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

10/12, 11-13.

1. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ basi di V e W rispettivamente. Allora L è un isomorfismo se e solo se la matrice $[L]_{\mathscr{B},\mathscr{D}}$ è invertibile.
2. Matrici simili. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, allora $A \sim C$. Se $A \sim B$, allora $B \sim A$.
3. Se $L : V \to V$ è un operatore lineare e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora le matrici $[L]\mathcal{B}, \mathcal{B}$ e $[L]\mathcal{B}', \mathcal{B}'$ sono simili.
4. Supponiamo che due matrici A e A' (entrambe $n \times n$) siano simili. Dunque esiste $M \in \mathrm{Gl}(n)$ tale che $A' = M^{-1}AM$. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{B} = \{M^1, \ldots, M^n\}$ la lista formata dalle colonne di M. $\mathcal{B}$ è una base perché $M \in \mathrm{Gl}(n)$. Inoltre $M = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ e
$$A' = [L_A]_{\mathcal{B}.\mathcal{B}},$$
mentre $[L_A]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = A$. In breve: due matrici simili rappresentano lo stesso operatore lineare rispetto a basi diverse.

5. Autovettori, autovalori, autospazi di un operatore.

6. Un operatore $L : V \to V$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ tale che la matrice associata $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è diagonale. In tal caso $\mathcal{B}$ si chiama *base diagonalizzante*.

7. Una matrice quadrata è *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale.

8. Una matrice $A \in M(n)$ è diagonalizzabile se e solo se l'operatore $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile. Infatti se $D = M^{-1}AM$ e $\mathcal{B} = \{M^1, \dots, M^n\}$, allora D è diagonale se e solo se tutti i vettori M^j sono autovettori di L_A. Anzi $L_A(M^j) = \lambda_j M^j$ per ogni $j = 1, \dots, n$ se e solo se

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9. Radici reali di un polinomio. Teorema di Ruffini. Divisione di polinomi. Fattorizzazione di un polinomio reale in un prodotto di polinomi di grado 1 e di polinomi di grado 2 senza radici reali.

10. Molteplicità di una radice di un polinomio. Sia $p(t)$ un polinomio. Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di moltiplicità k se tutte le derivate di p fino all'ordine $k-1$ incluso si annullano in λ. Per esempio una radice ha molteplicità 1 se la derivata 0-esima, cioè il polinomio p stesso, si annulla in λ e se $p'(\lambda) \neq 0$. Supponiamo di avere fattorizzato il polinomio $p(t)$, cioè di averlo scritto nella forma seguente:

$$p(t) = a(t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k} q_1(t) \cdots q_s(t)$$

dove $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, i numeri λ_j sono tutti distinti e i polinomi $q_j(t)$ hanno tutti grado 2 e sono privi di radici reali. (Ogni polinomio si può fattorizzare in questo modo e la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine). Allora le radici di $p(t)$ sono esattamente $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e la radice λ_j ha molteplicità m_j.

11. Può essere molto difficile trovare le radici e le loro molteplicità. Se λ è radice di un polinomio $p(t)$, allora la molteplicità di λ si può calcolare nel modo seguente: sappiamo che $p(\lambda) = 0$. Calcoliamo le derivate di p in λ, supponiamo che le prime s derivate si annullino in λ, cioè $p'(\lambda) = p''(\lambda) = \dots = D^2 p(\lambda) = 0$, mentre $D^{s+1}(\lambda) \neq 0$. Allora la molteplicità di λ come radice di p è $s+1$.

13/12, 9-11.

1. Se $p(t)$ è un polinomio a coefficienti reali e λ è una radice di $p(t)$, allora esiste un numero $k \geq 1$ con la seguente proprietà: esiste un polinomio $q_k(t)$ tale che $p(t) = (t-\lambda)^k \cdot q_k(t)$, mentre NON esiste un polinomio $q_{k+1}(t)$ tale che $p(t) = (t-\lambda)^{k+1} \cdot q_{k+1}(t)$. (Diciamo che $(t-\lambda)^k$ *divide* $p(t)$, mentre $(t-\lambda)^{k+1}$ non lo divide.) Allora k è la *molteplicità* di λ come radice di $p(t)$.

2. Polinomi totalmente decomponibili.

3. Polinomio caratteristico di una matrice.

4. Traccia di una matrice. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

5. Se A è di ordine n, allora

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot t^{n-1} + \cdots + \det A.$$

6. Se $A \sim B$, allora

   (a) $\det A = \det B$,

   (b) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$,

   (c) $p_A = P_B$,

   (d) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

7. Il viceversa è FALSO: se ho due matrici A e B e so che le condizioni (a)-(d) qui sopra sono vere, NON è detto che A e B siano simili.

8. Gli autovalori di A sono le radici di p_A.

9. Se $\mathrm{Spett}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, allora gli autospazi $V_{\lambda_1}(A), \ldots, V_{\lambda_k}(A)$ sono in somma diretta.

10. Molteplicità geometrica di un autovalore λ: $m(\lambda)$.

11. I Criterio di diagonalizzabilità: se A è una matrice $n \times n$ e lo spettro di A è $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, allora A è diagonalizzabile se e soltanto se $\sum_{i=1}^k m(\lambda_i) = n$.

12. Molteplicità algebrica di un autovalore λ: $\mu(\lambda)$.

13. Disuguaglianza fondamentale: $1 \leq m(\lambda) \leq \mu(\lambda)$ (senza dimostrazione).

14. Un autovalore λ è *regolare* se $m(\lambda) = \mu(\lambda)$.

15. Un autovalore λ è *semplice* se $\mu(\lambda) = 1$. Un autovalore semplice è automaticamente regolare.

14/12, 11-13.

1. II Criterio di diagonalizzabilità: A è diagonalizzabile se e soltanto se il polinomio caratteristico di A è totalmente decomponibile e ogni autovalore è regolare.

2. Come costruire una base diagonalizzante: trovare lo spettro $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$; per ogni i l'autospazio relativo a λ_i è $V_{\lambda_i}(A) = \ker(A - \lambda_i I)$. Risolviamo il sistema omogeneo $(A - \lambda_i I) \cdot X = \underline{0}$. In questo modo troviamo una base $\mathscr{B}_i$ di $V_{\lambda_i}(A)$. Se A è diagonalizzabile, mettendo insieme queste basi troviamo una base diagonalizzante di A: $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$.

3. Come costruire una matrice M tale che $D := M^{-1}AM$ sia diagonale.

4. Se $D := M^{-1}AM$ è diagonale, le colonne di M sono autovettori di A. L'autovalore di M^j è il j-esimo termine sulla diagonale della matrice D. In particolare $\{M^1, \ldots, M^n\}$ è una base diagonalizzante per A.

5. Se A ha ordine n e ha n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

6. Se A è diagonalizzabile e i suoi autovalori (ripetuti secondo la molteplicità) sono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, allora $\det A = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ e $\operatorname{tr}(A) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

7. Esercizi sulla diagonalizzabilità.

17/12, 11-13

1. Autovalori, autovettori, polinomio caratteristico di matrici diagonali.

2. Equazione del sottospazio: metodo per trovare le equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^n$ a partire da una lista di generatori di W.

3. Metodo per trovare le equazioni cartesiane di una varietà lineare $S = X_0 + W \subset \mathbb{R}^n$ a partire dal punto X_0 e da una base del sottospazio vettoriale W. In altre parole questo metodo dà l'equazione cartesiana di una varietà lineare se ne è nota una rappresentazione parametrica.

4. Matrici a blocchi e loro determinante:
$$\text{Se} \quad A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E & C \end{pmatrix},$$
allora $\det A = \det B \cdot \det C$.

5. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. È bilineare, simmetrico e definito positivo.

6. Norma. Omogeneità della norma: $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

7. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dimostrazione).

8. Nozione di angolo fra due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$.

9. x e y sono perpendicolari (o ortogonali) se almeno uno è nullo oppure sono entrambi non nulli e hanno angolo $\pi/2$.

10. x e y sono perpendicolari se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$.

11. Diseguaglianza triangolare per la norma: $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

12. Distanza fra vettori di $\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = ||x-y||$. Proprietà della distanza.

20/12, 9-11

1. Il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore ed è l'unico vettore con questa proprietà.

2. Caratterizzazione dell'uguaglianza nella diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e nella diseguaglianza triangolare: se $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$ o se $||x+y|| = ||x|| + ||y||$, allora x ed y sono linearmente dipendenti.

3. Sistemi e basi ortogonali e ortonormali.

4. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortogonale.

5. Se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale, i coefficienti di Fourier di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ coincidono con le coordinate di x rispetto alla base $\mathcal{B}$.

6. Se $\mathcal{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è un sistema ortogonale, allora $\mathcal{L}$ è linearmente indipendente.

7. Dato un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ poniamo
$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v\rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V\}.$$
Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è una base di V, allora
$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v_j\rangle = 0 \text{ per ogni } j = 1, \ldots, h\}.$$

8. $V^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $V \cap V^\perp = \{0\}$.

9. Sia $\mathscr{L} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonale di V. Allora dato $x \in \mathbb{R}^n$, esistono $x' \in V$ e $x'' \in V^\perp$ tali che
$$x = x' + x''.$$
Inoltre x' e x'' sono unici. E vale la formula
$$x' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, u_i\rangle}{||u_i||^2} u_i.$$
In particolare $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.

10. Teorema di Pitagora generalizzato: $||x||^2 = ||x'||^2 + ||x''||^2$.

11. Algoritmo di Gram-Schmidt. Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale.

21/12, 11-13

1. $\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$ (prodotto di matrici).

2. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio e sia A una matrice $m \times n$ tale che $V = \ker A$ e $\mathrm{rg}(A) = m$. Allora i vettori $(A_1)^T, \ldots, (A_m)^T$ formano una base di $V^\perp$

3. Matrici ortogonali: $A^T \cdot A = I_n$.

4. È equivalente a dire che $A \in \mathrm{Gl}(n)$ e $A^T = A^{-1}$.

5. L'insieme di tutte le matrici ortogonali si indica con $\mathrm{O}(n)$.

6. Se A è ortogonale, allora $A \cdot A^T = I_n$.

7. Se $A, B \in \mathrm{O}(n)$, allora $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ e $AB \in \mathrm{O}(n)$.

8. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\det A = \pm 1$.

9. Se A, B sono matrici $n \times n$, allora $(AB)_{ij} = \langle A_i^T, B^j >$.

10. Una matrice A $n \times n$ è ortogonale se e solo se le colonne di A formano una base ortonormale: $\langle A^i, A^j\rangle = (A^i)^T \cdot A^j = (A^T \cdot A)_{ij}$.

11. Una matrice A $n \times n$ è ortogonale se e solo se le trasposte delle righe di A formano una base ortonormale.

12. Se $A \in M(n)$, e $X, Y \in \mathbb{R}^n$, allora
$$\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^T Y\rangle.$$

13. Delta di Kronecker δ_{ij}.

14. Se $v \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a tutto $\mathbb{R}^n$, allora $v = 0$.

15. Se A è una matrice $m \times n$ e $\ker A = \mathbb{R}^n$, allora $A = 0$.

16. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale e sia A una matrice A $n \times n$. Allora A è ortogonale se e solo se la base $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ è ancora ortonormale.

    Dimostrazione. $\{Av_i\}$ è una base o.n.
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \forall i \forall j \quad \langle Av_i, Av_j\rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \forall j \quad \langle v_i, A^T A v_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \forall j \quad \langle v_i, (A^T A - I) v_j\rangle = 0. \end{aligned}$$

    Dunque se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\{Av_i\}$ è una base o.n. Viceversa se $\{Av_i\}$ è una base o.n., allora fissiamo un indice i. Siccome $\forall i, \langle v_i, (A^T A - I) v_j\rangle = 0$ il vettore $(A^T A - I) v_j$ è ortogonale a tutto $\mathbb{R}^n$. Ma questo vale per ogni j, quindi $\ker(A^T A - I) = \mathbb{R}^n$, quindi $A^T A = I$. $\square$

17. Sia A una matrice $n \times n$. Allora $A \in \mathrm{O}(n)$ sse per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle. \tag{1}$$

Dimostrazione. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, A^T AY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Viceversa supponiamo che valga (1) valga per ogni $X.Y \in \mathbb{R}^n$. Allora ragionando come prima

$$\begin{aligned} 0 &= \langle AX, AY \rangle - \langle X, Y \rangle = \\ &= \langle X, (A^T A - I)Y \rangle. \end{aligned}$$

Siccome questo vale per ogni X, risulta $(A^T A - I)Y = 0$. Ma allora $\ker(A^T A - I) = \mathbb{R}^n$, dunque $A \in \mathrm{O}(n)$. $\square$

18. Matrici ortogonali 2×2. Sia $A \in \mathrm{O}(2)$. Se $\det A = 1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

In questo caso A rappresenta la rotazione di angolo θ in senso antiorario. Se invece $\det A = -1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

In questo caso A rappresenta la riflessione rispetto alla retta s passante per l'origine e per il punto $(\cos(\theta/2), \operatorname{sen}(\theta/2))$.

7/1, 11-13

1. Forme quadratiche e corrispondenza con le matrici simmetriche.

2. Segno di una forma quadratica.

3. Segno di una forma quadratica diagonale.

10/1, 9-11

1. Sia f una forma quadratica in n variabili e sia A la matrice simmetrica associata. Per il teorema spettrale esistono una matrice $M \in \mathrm{O}(n)$ ed una matrice diagonale D tali che $A = MDM^{-1}$. M e D si trovano in questo modo:

   (a) Si determinano gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di A.

(b) Per ogni autospazio $V_{\lambda_i}(A)$ si trova una base *ortonormale* $\mathscr{B}_i$. Pongo $\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$. Allora M è la matrice che ha come colonne i vettori della base $\mathscr{B}$.

(c) Invece D è la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di A ciascuno ripetuto secondo la propria molteplicità.

2. Una volta che abbiamo trovato $\mathscr{B}$, M e D, poniamo $Y = [X]_{\mathscr{B}}$. Allora si ha

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

   Questa è la *forma canonica* di f.

3. Determinazione del segno della forma quadratica f a partire dagli autovalori di A.

4. Criterio di Sylvester o dei minori incapsulati.

5. Il caso di una forma quadratica in 2 variabili.

11/1, 11-13

1. Esercizio su Gram-Schmidt.

2. Svolgimento di una prova d'esame.