Corso di Geometria e Algebra
Programma svolto
anno accademico 2017/2018

14 gennaio 2018

4/10, 11-13 aula EF4.

1. Funzioni. Funzioni iniettive. Funzioni suriettive.
2. Simboli $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
3. ”$p \Rightarrow q$” equivale a ”(non q) $\Rightarrow$ (non p)”.
4. Negazione di affermazioni contenenti $\forall$ o $\exists$.
5. Vettori applicati nel piano.
6. Somma di vettori. Regola del parallelogramma.

5/10, 11-13 aula EF4.

1. Prodotto cartesiano di insiemi.
2. L’operazione di somma fra numeri reali è una funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
3. L’operazione di somma fra vettori applicati nel piano è una funzione
$$\mathbb{E}_O \times \mathbb{E}^2_O \longrightarrow \mathbb{E}^2_O.$$
4. Prodotto di un vettore per uno scalare. Questa operazione è una funzione
$$\mathbb{R} \times \mathbb{E}^2_O \longrightarrow \mathbb{E}^2_O.$$
5. Proprietà della somma di vettori e del prodotto per uno scalare.
6. Riferimenti cartesiani nel piano: $\mathcal{R} = O\vec{i}\vec{j}$.
7. Componenti di un vettore rispetto al riferimento.
8. Coordinate del punto rispetto al riferimento.

6/10, 14-15 aula EF4.

1. Riferimenti cartesiani nello spazio: $\mathcal{R} = O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$.
2. Coordinate di un punto nello spazio rispetto a un riferimento. Componenti di un vettore rispetto a un riferimento.
3. Equazione parametrica della retta (sia nella forma vettoriale che in coordinate).

11/10, 11-13.

1. Funzioni biunivoche.
2. La funzione che associa a un vettore il suo punto finale è una corrispondenza biunivoca fra vettori applicati e punti dello spazio.
3. Le coordinate di un punto stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio e $\mathbb{R}^3$.
4. Combinazioni lineari.
5. $\mathrm{Span}(\vec{u})$, $\mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$, $\mathrm{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
6. Insiemi di 2 vettori linearmente indipendenti.
7. Insiemi di 3 vettori linearmente indipendenti.
8. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, l'insieme $\mathrm{Span}(\vec{v})$ è in corrispondenza biunivoca con una retta. La corrispondenza è quella che associa a un vettore il suo punto finale.
9. Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora $\mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$ è in corrispondenza biunivoca con un piano.
10. Se $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora $\mathrm{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ è in corrispondenza biunivoca con tutto lo spazio.

12/10, 11-13.

1. Giacitura di un piano o di una retta.
2. Due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.
3. Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa giacitura.
4. Definizione del prodotto scalare.
5. Proprietà del prodotto scalare: bilinearità, simmetria, positività.
6. Fissato un riferimento cartestiano ortonormale $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, come calcolare in coordinate prodotti scalari.

7. Dato un vettore non nullo $\vec{n}$ e un punto P_0, il piano ortogonale ad $\vec{n}$ e passante per P_0 è $\pi = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0\}$.
8. Equazione cartesiana del piano.
9. Proiezione di un punto su un piano.
10. Proiezione di un punto su una retta.

13/10, 14-15.

1. Equazioni cartesiane della retta.
2. Due piani sono paralleli se e solo se i vettori normali sono proporzionali.
3. Le equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

identificano una retta se e solo se i vettori $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e $\vec{n}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$ sono linearmente indipendenti.
4. Passaggio dalle equazioni parametriche alle equazioni cartesiane per rette e piani nello spazio, mediante eliminazione dei parametri.
5. Passaggio dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche per rette e piani nello spazio, mediante scelta dei parametri.
6. Norma di un vettore. Distanza fra punti. Formula in coordinate.

18/10, 11-13

1. Operazioni di somma e prodotto per uno scalare in $\mathbb{R}^n$. Loro proprietà.
2. Definizione di spazio vettoriale.
3. Esempio: se E è un insieme non vuoto e V è l'insieme di tutte le funzioni da E in $\mathbb{R}$, posso definire somma e prodotto per uno scalare su V. Con queste operazioni V è uno spazio vettoriale.
4. Polinomi. Grado di un polinomio. $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$.
5. L'insieme di tutti i polinomi con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare naturali è uno spazio vettoriale.
6. Regole di calcolo in uno spazio vettoriale
   - legge di cancellazione: se $u + v = u + w$, allora $v = w$;
   - $0 \cdot v = 0$;

- $(-1) \cdot v = -v$;
- $\lambda \cdot 0 = 0$;
- se $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$, allora $\lambda \cdot v \neq 0$.

7. Definizione di sottospazio vettoriale.

19/10, 11-13

1. Simbolo di sommatoria $\sum$.
2. Esempi di sottospazi:
   - L'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   - Per ogni spazio vettoriale V, i sottoinsiemi $\{0\}$ e V sono sottospazi di V.
   - Le rette e i piani per l'origine corrispondono a sottospazi vettoriali di $\mathbb{E}^3_O$. Infatti se r è una retta per l'origine O, l'insieme

     $$W_r := \{\vec{v} \in \mathbb{E}^3_O : \exists P \in r, \text{ tale che } \vec{v} = \vec{OP}\},$$

     cioè l'insieme formato da tutti i vettori della forma $\vec{OP}$ con $P \in r$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^3_O$. Lo stesso succede se invece di una retta r consideriamo un piano π: $W_\pi := \{\vec{v} \in \mathbb{E}^3_O : \exists P \in \pi, \text{ tale che } \vec{v} = \vec{OP}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^3_O$.
3. Intersezione di sottospazi: è ancora un sottospazio.
4. Sistemi lineari omogenei di k equazioni in n incognite.
5. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di k equazioni in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
6. L'unione di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V in generale non è un sottospazio vettoriale di V.
7. Somma di sottospazi.
8. Nozione di combinazione lineare.

20/10, 14-15

1. Proiezione di un punto su una retta.
2. Dati un vettore $\vec{v}$ ed un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$, possiamo scomporre $\vec{v}$ in una parte $\vec{v}'$ parallela ad $\vec{u}$ ed una parte $\vec{v}''$ ortogonale ad $\vec{u}$. La parte parallela è detta p *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$.

3. La proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il vettore

$$\vec{v}' := \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{||\vec{u}||^2} \vec{u}.$$

4. Distanza di un punto da una retta.

5. Distanza di un punto da un piano.

25/10, 11-13

1. Iperpiani di $\mathbb{R}^n$.

2. Somma di k sottospazi: $W_1 + \cdots + W_k \subset V$.

3. Combinazioni lineari. Span. Spazio generato.

4. $\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_k) \subset \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1})$. Se vale l'uguaglianza dico che u_{k+1} è superfluo. Ciò succede se e soltanto se $u_{k+1} \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_k)$.

5. Lista di generatori di uno spazio vettoriale V.

6. Spazi vettoriali finitamente generati.

7. Lo spazio vettoriale dei polinomi non è finitamente generato.

8. Vettori linearmente indipendenti.

27/10, 14-15

1. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di V. Sia $f : \mathbb{R}^n \to V$ la funzione definita dalla formula

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1 v_1 + \cdots x_n v_n.$$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

A) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una lista linearmente indipendente (cioè i vettori $v_!, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti);

B) f è iniettiva;

C) se $f(x) = 0$ allora $x = \underline{0}$;

D) $v_1 \neq \underline{0}$,
$v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$,
$\ldots,$
$v_k \notin \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$,
$\ldots,$
$v_n \notin \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

2. Base di uno spazio vettoriale V. Coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base di V.
3. Piano passante per 3 punti non allineati. Posizioni reciproche fra piani: coincidenti, paralleli, incidenti.

2/11, 11-13

1. Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e $V \neq \{0\}$, allora esiste una base di V.
2. Algoritmo di estrazione.
3. Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e $V \neq \{0\}$, allora tutte le basi contengono lo stesso numero di elementi che viene chiamato *dimensione* (senza dimostrazione).
4. Se ad una base aggiungo o tolgo un vettore non è più una base.
5. Algoritmo di completamento. Se $\mathscr{L}$ è una lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale finitamente generato, allora posso scegliere una lista di vettori $\mathscr{L}'$ tale che $\mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$ sia una base.
6. Se $V = \{0\}$ per definizione poniamo $\dim V := 0$.
7. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente, allora $\mathscr{L}$ contiene al più n elementi. Se $\mathscr{L}$ contiene esattamente n elementi, allora è una base.
8. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è un sistema di generatori di V, allora $\mathscr{L}$ contiene almeno n elementi. Se $\mathscr{L}$ contiene esattamente n elementi, allora è una base.

3/11, 14-15

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathscr{L}$ una lista di n vettori distinti di V. Allora $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente se e soltanto se è un sistema di generatori se e soltanto se è una base.
2. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $W \subseteq V$ è un sottospazio, allora $\dim W \leq \dim V$. Se $\dim W = \dim V$, allora $W = V$.
3. Formula di Grassmann.
4. Se W e Z sono sottospazi di V, allora $\dim(W \cap Z) \geq \dim W + \dim Z - \dim V$.
5. Se $\dim W + \dim Z > \dim V$, allora $W \cap Z \neq \{0\}$.
6. Sottospazi in somma diretta.

7. Sia $\{w_1, \ldots, w_k\}$ una base di W e sia $\{z_, \ldots, z_n\}$ una base di Z. La lista $\mathscr{S} = \{w_1, \ldots, w_k, z, \ldots, z_n\}$ è un sistema di generatori di $W + Z$. Se applichiamo l'algoritmo di estrazione a questa lista, otteniamo una base di $W + Z$. Inoltre otteniamo contemporaneamente una base di $W \cap Z$ nel modo seguente. Se un certo vettore z_j viene eliminato dalla lista $\mathscr{S}$, vuol dire che $z_j \in \operatorname{Span}(w_1, \ldots, w_k, z_1 \ldots, z_{j-1})$. Dunque esistono numeri λ_i e μ_i tali che

$$z_j = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k + \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_{j-1} z_{j-1}.$$

Dunque

$$-\mu_1 z_1 + \cdots - \mu_{j-1} z_{j-1} + z_j = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k.$$

Poniamo

$$u := -\mu_1 z_1 + \cdots - \mu_{j-1} z_{j-1} + z_j = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k.$$

Dunque $u \in W \cap Z$. Costruisco un vettore di questo tipo ogni volta che elimino un vettore z_j dalla lista $\mathscr{S}$. Tutti i vettori u che ottengo in questo modo formano una base di $W \cap Z$.

8/11, 11-13

1. Matrici $m \times n$, colonne A^j, righe A_i, elementi di posto (i, j), $A = (a_{ij})$.

2. Somma di matrici. Prodotto di uno scalare per una matrice. $M(m, n)$ è uno spazio vettoriale. $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ è una base. $\dim M(m, n) = mn$.

3. Se
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
definisco
$$A \cdot X := x_1 A^1 + \cdots x_n A^n.$$

4. Se A è $m \times n$ e B è $n \times k$ definisco
$$A \cdot B := (AB^1 | \cdots | AB^n).$$

5. Siano $A \in M(m, n)$ e $B \in M(n, k)$ e sia $C = A \cdot B$. Allora
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$
Per questo motivo si chiama prodotto righe per colonne.

6. Siano $A, A' \in M(m,n)$ e $B \in M(n,k)$. Allora $(A+A')B = AB + A'B$.
7. Siano $A \in M(m,n)$ e $B, B' \in M(n,k)$. $A(B+B') = AB + AB'$.
8. Siano $A \in M(m,n)$, $B \in M(n,k)$ e $C \in M(k,p)$. Allora $(AB)C = A(BC)$.
9. In generale $AB \neq BA$.
10. $Ae_j = A^j$.
11. Il prodotto fra matrici permette di scrivere in forma compatta i sistemi lineari. Un sistema di m equazioni in n incognite corrisponde a una equazione della forma $AX = B$, dove $A \in M(m,n)$, $X \in \mathbb{R}^n$ (vettore delle incognite) e $B \in \mathbb{R}^m$.
12. Matrice identica I_n.
13. Potenze di una matrice quadrata.
14. Matrici invertibili.

10/11, 14-15

1. Posizioni reciproche fra rette nello spazio euclideo.
2. Posizioni reciproche fra una retta ed un piano nello spazio euclideo.
3. Matrici invertibili. Definizione di $\mathrm{Gl}(n)$.
4. Se $A_1, A_2 \in \mathrm{Gl}(n)$, allora anche $A_1 \cdot A_2 \in \mathrm{Gl}(n)$.

15/11, 11-13

1. Esempio di una matrice 2×2 non invertibile.
2. Nucleo di una matrice $m \times n$: $\ker A$. È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
3. Sistemi quadrati.
4. Sia $A \in M(n)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
   - $A \in \mathrm{Gl}(n)$.
   - Per ogni $B \in \mathbb{R}^n$ il sistema lineare $AX = B$ ha una unica soluzione.
   - $\ker A = \{0\}$.
   - Le colonne di A formano una base di $\mathbb{R}^n$.
5. Se $A \in \mathrm{Gl}(n)$ e $\mathscr{B} = \{A^1, \ldots, A^n\}$, indico con $[x]_{\mathscr{B}}$ le coordinate del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Allora
$$A^{-1} = (B^1 | \cdots | B^n), \qquad \text{dove } B^j := [e_j]_{\mathscr{B}}.$$
   (Con e_j si indicano come al solito i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.)

6. Se $A, B \in M(n)$ e $AB \in Gl(n)$, allora $A, B \in \mathrm{Gl}(n)$.
7. Determinante di matrici 2×2 e 3×3.

16/11, 11-13

1. Formula generale per il determinante di una matrice $n \times n$ sviluppando lungo la prima colonna.
2. Teorema di Laplace: si può sviluppare il determinante secondo una colonna qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la j-esima colonna è

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

3. Matrici triangolari superiori e inferiori. Il loro determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.
4. $\det I_n = 1$.
5. Proprietà del determinante:
   (a) Scambiando due colonne il determinante cambia di segno. Per esempio se $A = (A^1|A^2|A^3|\cdots|A^n) \in M(n)$,

   $$\det(A^2|A^1|A^3|\cdots|A^n) = -\det A.$$

   (b) $\det(\lambda A^1|A^2|\cdots|A^n) = \lambda \cdot \det A$.
   (c) $\det(C_1 + C_2|A^2|\cdots|A^n) = \det(C_1|A^2|\cdots|A^n) + \det(C_2|A^2|\cdots|A^n)$.
   (d) Se $A^j = 0$, allora $\det A = 0$.
   (e) Se $A^i = A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.
   (f) Se $A^i = \lambda A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.
6. Definizione di funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
7. Date $(n-1)$-colonne $A^2, \ldots, A^n$, la funzione

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(X) := \det(X|A^2|\cdots|A^n)$$

   è lineare. Lo stesso vale per altre colonne.
8. Trasposizione di una matrice. Proprietà della trasposizione. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.
9. $\det A = \det(A^T)$.
10. Tutte le proprietà del determinante che valgono per colonne, valgono anche per le righe.

11. Si può sviluppare il determinante secondo una riga qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la k-esima riga è

$$\det A = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+k} a_{kh} \det A_{kh}.$$

12. Calcolo del determinante. Se una colonna (o una riga) della matrice A è nulla, allora $\det A = 0$.

13. Algoritmo per il calcolo del determinante. Se la prima colonna è nulla abbiamo finito. Altrimenti esiste un elemento non nullo nella prima colonna. Supponiamo per semplicità che sia a_{11}. Allora per ogni $i = 2, \ldots, n$ sommo alla i-esima riga di A la prima riga moltiplicata per $-a_{i1}/a_{11}$. La matrice A' così ottenuta ha determinante uguale a quello di A ed è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

dove $B \in M(n-1)$. Sviluppando lungo la prima riga ottengo $\det A = \det A' = a_{11} \cdot \det B$. Procedo su B nello stesso modo.

17/11, 14-15

1. Teorema di Binet (senza dimostrazione).
2. In generale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
4. Una matrice $A \in M(n)$ è invertibile se e soltanto se $\det A \neq 0$.
5. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

6. Matrice cofattore. Formula per la matrice inversa.
7. Teorema di Cramer (senza dimostrazione).
8. Esempi di calcolo di determinante.

22/11, 11-13

1. Definizione di rango.
2. Se A è $m \times n$, $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.
3. Se $m \leq n$, allora $\mathrm{rg}\, A = m$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una lista di generatori di $\mathbb{R}^m$.

4. Se $m \geq n$, allora $\operatorname{rg} A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una lista linearmente indipendente.

5. Se $m = n$, allora $\operatorname{rg} A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una base di $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$.

6. Se scambio due colonne di una matrice il rango non cambia.

7. Se sommo a una colonna un multiplo di un'altra colonna, il rango non cambia.

8. Se moltiplico una colonna di una matrice per un numerno diverso da 0, il rango non cambia.

9. Se $m = n$, allora $\operatorname{rg}(A) = n$ se e solo se $\det A \neq 0$ se e solo se $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{R})$.

10. Sottomatrici e minori.

11. Sia $A' \subset A$ una sottomatrice quadrata $p \times p$ e sia $\det A' \neq 0$. Allora $p \leq \operatorname{rg}(A)$.

12. $\operatorname{rg}(A) = \max\{r$: esiste un minore non nullo di A di ordine $r\}$.

13. $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T) = \dim \operatorname{Span}(A_1, \ldots, A_m)$.

14. Le operazioni possiamo farle anche sulle righe.

15. Siano $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ vettori di $\mathbb{R}^m$. Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sia una lista linearmente indipendente e che $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ sia una lista linearmente dipendente. Allora $v_{k+1} \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ e
$$\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}) = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k).$$

16. Sistemi lineari e loro scrittura matriciale. Matrice dei coefficienti. Vettore dei termini noti. Vettore delle incognite. Insieme delle soluzioni. Sistemi compatibili.

17. Matrice completa di un sistema lineare.

18. Teorema di Rouché-Capelli: Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbb{R}^m$. Allora il sistema lineare
$$AX = B$$
è compatibile se e solo se $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\tilde{A})$, dove $\tilde{A} = (A|B)$. (Con dimostrazione.)

23/11, 11-13

1. Sia A una matrice e sia $\mathscr{L}$ una lista di colonne di A che è linearmente indipendente e tale che aggiungendo ad $\mathscr{L}$ una qualsiasi altra colonna di A, la lista cessa di essere linearmente indipendente. Allora il rango di A è il numero di colonne contenute in $\mathscr{L}$
2. Due sistemi lineari sono detti equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
3. Operazioni su un sistema lineare che lo trasformano in un sistema equivalente.
4. Sistemi lineari a scala e loro risoluzione.
5. Metodo di Gauss per ridurre un sistema lineare ad un sistema equivalente a scala.
6. Rappresentazione parametrica delle soluzioni di un sistema lineare.
7. Conoscere una rappresentazione parametrica delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, equivale a conoscere una base di $\ker A$.
8. I Teorema di struttura: se A è una matrice $m \times n$, le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \operatorname{rg} A$. Questo sottospazio vettoriale viene chiamato nucleo di A ed è indicato con il simbolo $\ker A$.
9. Il rango è il numero di righe linearmente indipendenti, dunque il numero di equazioni linearmente indipendenti.

24/11, 14-15

1. Traslati di sottospazi vettoriali (o varietà lineari).
2. II Teorema di struttura: Se il sistema $AX = B$ è compatibile, allora l'insieme S delle soluzioni è un traslato di $\ker A$. Infatti data una qualunque soluzione $X_0 \in S$ si ha
$$S = X_0 + \ker A := \{X \in \mathbb{R}^n : X - X_0 \in \ker A\}.$$
In particolare S è un sottovarietà lineare di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \operatorname{rg}(A)$.
3. Esercizi sui sistemi lineari.

29/11, 11-13

1. Eercizi sui sistemi lineari.
2. Sistemi lineari dipendenti da un parametro.
3. Radici reali di un polinomio. Teorema di Ruffini. Divisione di polinomi. Fattorizzazione di un polinomio reale in un prodotto di polinomi di grado 1 e di polinomi di grado 2 senza radici reali.

30/11, 11-13

1. Applicazioni lineari fra spazi vettoriali.
2. Le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le applicazioni L_A con A una matrice $m \times n$.
3. La derivata come applicazione lineare.
4. Se $f : v \longrightarrow W$ è lineare e U è un sottospazio vettoriale di V, allora $f(U)$ è un sottospazio vettoriale di W. In particolare, $\operatorname{Im} f$ è un sottospazio vettoriale di W.
5. Nucleo.
6. Teorema delle dimensioni: se V ha dimensione finita, allora
$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$
7. Se $f = L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, allora $\ker L_A = \ker A$, $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^n)$ e $\dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rg}(A)$.
8. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono generatori di V e $f : V \to W$ è lineare, allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ sono generatori di $\operatorname{Im} f$.
9. $L_A \circ L_B = L_{AB}$.
10. Applicazione identicamente nulla.
11. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono vettori linearmente indipendenti di V e $f : V \to W$ è lineare, i vettori $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ non sono necessariamente linearmente indipendenti.
12. Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
    (a) f è iniettiva.
    (b) $\ker f = \{0_V\}$.
    (c) Per ogni lista linearmente indipendente $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in V, la lista $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è linearmente indipendente.

1/12, 14-15

1. Metodo per trovare le equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^n$ a partire da una lista di generatori di W.
2. Metodo per trovare le equazioni cartesiane di una varietà lineare $S = X_0 + W \subset \mathbb{R}^n$ a partire dal punto X_0 e da una base del sottospazio vettoriale W. In altre parole questo metodo dà l'equazione cartesiana di una varietà lineare se ne è nota una rappresentazione parametrica.

3. Metodo per individuare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$ se ne sono noti dei generatori: si forma la matrice che ha per colonne i generatori dati e la si riduce a scala. La base cercata è formata dalle colonne della matrice originale corrispondenti alle colonne della matrice a scala che contengono i pivot.

4. Le rotazioni nel piano come applicazioni lineari.

6/12, 11-13

1. Dimostrazione del teorema delle dimensioni.

2. Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare e sia $\mathscr{L} := \{v_1, \ldots, v_n\}$. Poniamo $\mathscr{L}' := \{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$. Se $\mathscr{L}$ è una lista linearmente dipendente, anche $\mathscr{L}'$ è linearmente dipendente. Se $\mathscr{L}'$ è una lista linearmente indipendente, anche $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente. Se L è iniettiva e $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente, allora anche $\mathscr{L}'$ è linearmente indipendente.

3. Sia A una matrice $m \times n$. Allora L_A è iniettiva se e solo se $\mathrm{rg}(A) = n$, mentre L_A è suriettiva se e solo se $\mathrm{rg}(A) = m$.

4. Una applicazione lineare e biunivoca si chiama isomorfismo.

5. Se $\dim V = \dim W$, allora una applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è un isomorfismo.

6. Se V ha dimensione n e $\mathcal{B}$ è una base di V, l'applicazione data dalle coordinate

$$[\bullet]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

   è un isomorfismo.

7. Due spazi sono isomorfi (cioè esiste un isomorfismo fra di essi) se e solo se hanno la stessa dimensione.

8. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \ldots, w_n \in W$ dei vettori arbitrari. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ tale che $L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \ldots, n$.

9. Se $\dim V > \dim W$, non esistono applicazioni lineari iniettive $L : V \longrightarrow W$.

10. Se $\dim V < \dim W$, non esistono applicazioni lineari suriettive $L : V \longrightarrow W$.

11. Controimmagine di un punto del codominio: se $f : X \to Y$ è una funzione e $y \in Y$, allora la controimmagine di y mediante f è il sottoinsieme

$$f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) = y\}.$$

12. Siano V e W spazi vettoriali di dimesione n ed m rispettivamente. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo $w \in W$. Se $w \notin \operatorname{Im} L$, allora $L^{-1}(w) = \varnothing$. Se invece $w \in \operatorname{Im} L$, allora $L^{-1}(w) \neq \varnothing$ e $L^{-1}(w)$ è un traslato del nucleo, ossia fissato un qualsiasi elemento v_0 di $L^{-1}(w)$, si ha

$$L^{-1}(w) = \{v \in V : v - v_0 \in \ker L\} = v_0 + \ker L.$$

I teoremi di Rouché-Capelli e di struttura si possono interpretare come casi particolari di questo teorema.

7/12, 11-13

1. Matrice associata ad una applicazione lineare: sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{D} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ di W. La matrice associata ad L rispetto a queste basi è la matrice che ha come colonna j-esima il vettore

$$[L(v_j)]_{\mathcal{D}}.$$

Questa matrice viene indicata col simbolo $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}$. (Nel libro viene usato invece il simbolo $[[L]]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.) Se $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} = A = (a_{ij})$, allora

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

2. Se $v \in V$ e $A = [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}$, allora

$$[L(v)]_{\mathcal{D}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

3. Supponiamo che V, W, Z siano spazi vettoriali e che $L : V \longrightarrow W$ ed $S : W \longrightarrow Z$ siano applicazioni lineari. Fissiamo basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ di V, W e Z rispettivamente. Allora

$$[S \circ L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [S]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} \cdot [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}.$$

4. Se V è uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora la matrice $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ viene chiamata *la matrice del cambiamento di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Se $v \in V$ ha coordinate X rispetto a $\mathcal{B}$ e X' rispetto a $\mathcal{B}'$ e M è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, allora

$$X' = MX.$$

5. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

6. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V e $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ basi di W. Allora
$$[L]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{D}'} = M \cdot [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} N^{-1}$$
dove $M = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}'}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ e $N = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

7. Se $L : V \to W$ è lineare, $\mathcal{B}$ è una base di V e $\mathcal{D}$ è una base di W e $A = [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}$, allora
$$\ker L = \{v \in V : [v]_{\mathcal{B}} \in \ker A\},$$
$$\operatorname{Im} L = \{w \in W : [w]_{\mathcal{D}} \in \operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^m)\}.$$
In particolare
$$\dim \ker L = \dim V - \operatorname{rg}(A), \quad \dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rg}(A).$$

8. Esercizi sulle applicazioni lineari.

13/12, 11-13

1. Sia $L : V \longrightarrow W$ è una applicazione lineare. Supponiamo che esista una base $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V tale che la lista $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ sia una base di W. Allora L è un isomorfismo.

2. Viceversa se $L : V \longrightarrow W$ è un isomorfismo e $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una qualsiasi base di V, allora la lista $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ è una base di W.

3. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ basi di V e W rispettivamente. Allora L è un isomorfismo se e solo se la matrice $[L]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{D}}$ è invertibile.

4. Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori di V e $\mathscr{B}$ è una base di V, allora i vettori $\{v_i\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se i vettori $[v_i]_{\mathscr{B}}$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti.

5. La matrice del cambiamento di base $[\mathrm{id}_V]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{D}}$ è invertibile e la sua inversa è $[\mathrm{id}_V]^{\mathscr{D}}_{\mathscr{B}}$.

6. Se A è una matrice $m \times n$ e $\mathscr{C}_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora
$$[L_A]^{\mathscr{C}_n}_{\mathscr{C}_m} = A.$$

7. Matrici simili. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, allora $A \sim C$. Se $A \sim B$, allora $B \sim A$.

8. Se $L : V \to V$ è un operatore lineare e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora le matrici $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ e $[L]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ sono simili.

9. Supponiamo che due matrici A e A' (entrambe $n \times n$) siano simili. Dunque esiste $M \in \mathrm{Gl}(n)$ tale che $A' = M^{-1}AM$. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{B} = \{M^1, \dots, M^n\}$ la lista formata dalle colonne di M. $\mathcal{B}$ è una base perché $M \in \mathrm{Gl}(n)$. Inoltre $M = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ e

$$A' = [L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}},$$

mentre $[L_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = A$. In breve: due matrici simili rappresentano lo stesso operatore lineare rispetto a basi diverse.

10. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

11. Se $A \sim B$, allora $\det A = \det B$, $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$ e $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$.

12. Matrici simili.

13. Operatori lineari. La matrice associata ad un operatore lineare $L : V \to V$ in una base $\mathcal{B}$ di V è la matrice $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

14. Se $L : V \to V$ è un operatore lineare e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora le matrici $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ e $[L]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ sono simili.

15. Supponiamo che due matrici A e A' (entrambe $n \times n$) siano simili. Dunque esiste $M \in \mathrm{Gl}(n)$ tale che $A' = M^{-1}AM$. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{B} = \{M^1, \dots, M^n\}$ la lista formata dalle colonne di M. $\mathcal{B}$ è una base perché $M \in \mathrm{Gl}(n)$. Inoltre $M = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ e

$$A' = [L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}},$$

mentre $[L_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = A$. In breve: due matrici simili rappresentano lo stesso operatore lineare rispetto a basi diverse.

16. Traccia di una matrice quadrata. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Dunque det, tr e rg sono invarianti per similitudine: rango, determinante, traccia.

17. Autovettori, autovalori, spettro, autospazi di operatori lineari e di matrici.

18. Operatori e matrici diagonalizzabili. Un operatore è diagonalizzabile se e solo se la sua matrice rispetto a qualsiasi base è diagonalizzabile.

14/12, 11-13

1. Gli autovalori di L coincidono con gli autovalori di $[L]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}$ per ogni base $\mathscr{B}$ di V. Un vettore $v \in V$ è autovettore di L con autovalore λ se e solo se $[v]_{\mathscr{B}}$ è autovettore della matrice $[L]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}$ con autovalore λ.

2. Base diagonalizzante. La matric che rappresenta l'operatore L in una base diagonalizzante è duiagonale.

3. Sia $A \in M(n)$ una matrice diagonalizzabile. Dunque esiste $M \in \mathrm{Gl}(n)$ tale che $D := M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale, allora i vettori colonna di M sono autovettori di A. L'autovalore di M^j è il j-esimo termine sulla diagonale della matrice D. In particolare $\{M^1, \dots, M^n\}$ è una base diagonalizzante per l'operatore L_A.

4. Molteplicità di una radice di un polinomio. Sia $p(t)$ un polinomio. Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di moltiplicità k se tutte le derivate di p fino all'ordina $k-1$ si annullano in λ. Per esempio una radice ha molteplicità 1 se la derivata 0-esima, cioè il polinomio p stesso, si annulla in λ e se $p'(\lambda) \neq 0$. Supponiamo di avere fattorizzato il polinomio $p(t)$, cioè di averlo scritto nella forma seguente:

$$p(t) = a(t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k} q_1(t) \cdots q_s(t)$$

   dove i numeri λ_j sono tutti distinti e i polinomio $q_j(t)$ hanno tutti grado 2 e sono privi di radici reali. (Ogni polinomio si può fattorizzare in questo modo e la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine). Allora le radici di $p(t)$ sono esattamente $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e λ_j ha molteplicità k.

5. Polinomio caratteristico di una matrice. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

6. Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ A ha grado n e alcuni dei suoi coefficienti li conosciamo:

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot t^{n-1} + \cdots + \det A.$$

7. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Questa è solo una condizione necessaria, non è sufficiente: esistono matrici con lo stesso polinomio caratteristico che *non* sono simili. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   soddisfano $p_A(t) = p_B(t) = t^4$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, ma non sono simili. Infatti se $A \sim B$, allora $A^2 \sim B^2$. Invece $A^2 = 0$ e $B^2 \neq 0$. Dunque A^2 e B^2 non possono essere simili. Ma allora neanche A e B sono simili.

8. Complementare di un sottospazio. Un complementare esiste sempre, anzi esistono sempre infiniti complementari di un sottospazio fissato.

9. Matrici a blocchi e loro determinante:

$$\text{Se} \quad A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E & C \end{pmatrix},$$

   allora $\det A = \det B \cdot \det C$.

10. Molteplicità algebrica, $\mu(\lambda)$, e molteplicità geometrica, $m(\lambda)$, di un autovalore di un operatore lineare. Se λ è un autovalore, allora
$$1 \leq m(\lambda) \leq \mu(\lambda).$$

11. Nozione di somma diretta di k sottospazi di uno spazio vettoriale V. Questa nozione generalizza la nozione già vista per $k = 2$.

12. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di un operatore L, allora gli autospazi $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ sono in somma diretta (dimostrazione solo per $k = 2$).

20/12, 9-11

1. I Criterio di diagonalizzabilità: se L è un operatore lineare e lo spettro di Ll è $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, allora L è diagonalizzabile se e soltanto se $\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n$.

2. Un autovalore λ è *regolare* se $m(\lambda) = \mu(\lambda)$.

3. Un autovalore λ è *semplice* se $\mu(\lambda) = 1$. Un autovalore semplice è automaticamente regolare.

4. II Criterio di diagonalizzabilità: L è diagonalizzabile se e soltanto se il polinomio caratteristico di L è totalmente decomponibile e ogni autovalore è regolare.

5. Come costruire una base diagonalizzante.

6. Come costruire una matrice M tale che $MDM^{-1} = A$ con D diagonale.

7. Se $n = \dim V$ e $L : V \to V$ ha n autovalori distinti, allora L è diagonalizzabile.

8. Se $p_A(t) =)\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$, allora $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ e $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

9. Esercizi sulla digonalizzabilità.

21/12,11-13

1. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. È bilineare, simmetrico e definito positivo.

2. Norma. Omogeneità della norma: $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

3. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dimostrazione). Nozione di angolo fra due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$.

4. Diseguaglianza triangolare per la norma: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

5. Caratterizzazione dell'uguaglianza nella diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e nella diseguaglianza triangolare: se $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$ o se $||x + y|| = ||x|| + ||y||$, allora x ed y sono linearmente dipendenti.

6. Distanza fra vettori di $\mathbb{R}^n$: $d(x, y) = ||x - y||$. Proprietà della distanza.

7. Sistemi e basi ortogonali e ortonormali.

8. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortogonale.

9. Se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale, i coefficienti di Fourier di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ coincidono con le coordinate di x rispetto alla base $\mathcal{B}$.

10. Se $\mathcal{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è un sistema ortogonale, allora $\mathcal{L}$ è linearmente indipendente.

11. Dato un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ poniamo
$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v\rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V\}.$$
Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è una base di V, allora
$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v_j\rangle = 0 \text{ per ogni } j = 1, \ldots, h\}.$$

12. $V^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $V \cap V^\perp = \{0\}$.

13. Sia $\mathscr{L} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonale di V. Allora dato $x \in \mathbb{R}^n$, esistono $x' \in V$ e $x'' \in V^\perp$ tali che
$$x = x' + x''.$$
Inoltre X' e x'' sono unici. E vale la formula
$$x' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, u_i\rangle}{||u_i||^2} u_i.$$
In particolare $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.

14. Teorema di Pitagora generalizzato: $||x||^2 = ||x'||^2 + ||x''||^2$.

22/12, 14-15

1. Algoritmo di Gram-Schmidt. Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette basi ortonormali.

9/1, 9-11

1. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio e sia A una matrice $m \times n$ tale che $V = \ker A$ e $\operatorname{rg}(A) = m$. Allora i vettori $(A_1)^T, \ldots, (A_m)^T$ formano una base di $V^\perp$

2. Matrici ortogonali: $A^T \cdot A = I_n$.

3. È equivalente a dire che $A^T = -A^{-1}$.

4. Se A, B sono matrici $n \times n$, allora $(AB)_{ij} = \langle A_i^T, B^j >$.

5. Se $A, B \in \mathrm{O}(n)$, allora $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ e $AB \in \mathrm{O}(n)$.
6. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\det A = \pm 1$.
7. Una matrice A $n \times n$ è ortogonale se e solo se le colonne di A formano una base ortonormale.
8. Una matrice A $n \times n$ è ortogonale se e solo se le trasposte delle righe di A formano una base ortonormale.
9. Se $A \in M(n)$, e $X, Y \in \mathbb{R}^n$, allora
$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^T Y \rangle.$$
10. Delta di Kronecker δ_{ij}.
11. Se $v \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a tutto $\mathbb{R}^n$, allora $v = 0$.
12. Se A è una matrice $m \times n$ e $\ker A = \mathbb{R}^n$, allora $A = 0$.
13. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale e sia A una matrice A $n \times n$. Allora A è ortogonale se e solo se la base $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ è ancora ortonormale.

    Dimostrazione. $\{Av_i\}$ è una base o.n.
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \forall i \forall j \quad \langle Av_i, Av_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \forall j \quad \langle v_i, A^T A v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \forall j \quad \langle v_i, (A^T A - I) v_j \rangle = 0. \end{aligned}$$
    Dunque se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\{Av_i\}$ è una base o.n. Viceversa se $\{Av_i\}$ è una base o.n., allora fissiamo un indice i. Siccome $\forall i, \langle v_i, (A^T A - I) v_j \rangle = 0$ il vettore $(A^T A - I) v_j$ è ortogonale a tutto $\mathbb{R}^n$. Ma questo vale per ogni j, quindi $\ker(A^T A - I) = \mathbb{R}^n$, quindi $A^T A = I$. □

14. Sia A una matrice $n \times n$. Allora $A \in \mathrm{O}(n)$ sse per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$
$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle. \tag{1}$$
    Dimostrazione. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora
$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, A^T AY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$
    Viceversa supponiamo che valga (1) valga per ogni $X.Y \in \mathbb{R}^n$. Allora ragionando come prima □
$$\begin{aligned} 0 &= \langle AX, AY \rangle - \langle X, Y \rangle = \\ &= \langle X, (A^T A - I) Y \rangle. \end{aligned}$$
    Siccome questo vale per ogni X, risulta $(A^T A - I) Y = 0$. Ma allora $\ker(A^T A - I) = \mathbb{R}^n$, dunque $A \in \mathrm{O}(n)$.
15. Matrici ortogonali 2×2.

10/1,11-13

1. Teorema spettrale: se A è simmetrica, allora A è diagonalizzabile e gli autospazi di A sono a due a due ortogonali. A lezione si è dimostrato soltanto che gli autospazi di sono a due a due ortogonali.

2. Altra formulazione equivalente: se A è simmetrica, allora esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

3. Data A simmetrica, per trovare una base ortonormale di autovettori di A, si fa così: trovo gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di A. Quindi trovo una base di ciascun autospazio. Applico Gram-Schmidt e trovo una base ortogonale $\mathscr{B}_i$ di ciascun autospazio. Pongo $\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$. Allora $\mathscr{B}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ (qui si sfrutta il fatto che gli autospazi sono fra loro ortogonali). Per ottenere una base ortonormale, basta normalizzare i vettori di $\mathscr{B}$.

4. Se A è una matrice $n \times n$ ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A, allora A è simmetrica.

5. Forme quadratiche e corrispondenza con le matrici simmetriche.

6. Segno di una forma quadratica.

7. Segno di una forma quadratica diagonale.

11/1, 11-13

1. Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Per il teorema spettrale esistono una matrice $M \in \mathrm{O}(n)$ ed una matrice diagonale D tali che $A = MDM^{-1}$. M e D si trovano in questo modo: si determinano gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di A. Per ogni autospazio $V_{\lambda_i}(A)$ si trova una base ortonormale $\mathscr{B}_i$. Pongo $\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$. Allora M è la matrice che ha come colonne i vettori della base $\mathscr{B}$. Invece D è la matrice diagonale che ha sulla diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ciascuno ripetuto secondo la propria molteplicità.

2. Se f è una forma quadratica e A è la matrice associata, siano M, D, λ_i e $\mathscr{B}$ come sopra. Allora posto $Y = [X]_{\mathscr{B}}$, si ha

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

   Questa è la *forma canonica* di f.

3. Determinazione del segno della forma quadratica f a partire dagli autovalori di A.

4. Criterio di Sylvester o dei minori incapsulati.

5. Il caso di una forma quadratica in 2 variabili.

12/1, 14-16

1. Svolgimento di un compito d'esame vecchio.