Spazio tangente

M = varietà differenziabile $\quad p \in M$

$\mathcal{C}^\infty_p$ = germi di funzioni C^∞ in p

$$:= \bigsqcup_{\substack{U \text{ aperto} \subset M \\ U \ni p}} C^\infty(U) \Big/ \sim$$

dove $\quad f \in C^\infty(U)$ e $g \in C^\infty(V)$

$f \sim g \iff \exists\, W \subset U \cap V$ aperto $p \in W$

t.c. $\quad f|_W = g|_W$

$\mathcal{D}_p := \{$derivazioni di $\mathcal{C}^\infty_p\} =$

$$:= \left\{ D \in (\mathcal{C}^\infty_p)^* : \quad D(f_p g_p) = (D f_p) \cdot g(p) + f(p)(D g_p) \right\}$$

$\mathcal{A}_p = \{$ curve differenziabili passanti per $p \}$

per def una curva diff passante per p è

una applic liscia $\quad \alpha : I \longrightarrow M$

dove $\quad I$ è un intervallo aperto tale che $0 \in I$

e $\quad \alpha(0) = p$.

Sia (U,φ) una carta con $p \in U$

Se $\alpha: I \longrightarrow M$ è una curva diff passante per p, allora $\varphi \circ \alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva parametrizzata t.c. $\varphi \circ \alpha(0) = \varphi(p)$

<u>Def</u>: siano $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_p$. Allora

$$\alpha \sim_\varphi \beta \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} (\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

qui φ è una qualunque carta.

<u>Lemma</u> (U,φ) (V,ψ) carte su M

$p \in U \cap V$. Se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_p$

allora $\alpha \sim_\varphi \beta \Longleftrightarrow \alpha \sim_\psi \beta$

<u>dim</u> Sia $h := \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$

il cambiamento di coordinate.

Allora

$$\psi \circ \alpha = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = h \circ \varphi \circ \alpha$$

allora
$$(\psi\circ\alpha)'(0) = dh_{\varphi(p)}\left((\varphi\circ\alpha)'(0)\right)$$
e allo stesso modo
$$(\psi\circ\beta)'(0) = dh_{\varphi(p)}\left((\varphi\circ\beta)'(0)\right)$$
Quindi $(\psi\circ\alpha)'(0) = (\psi\circ\beta)'(0)$
$$\iff \quad (\varphi\circ\alpha)'(0) = (\varphi\circ\beta)'(0)$$
perché h è un diffeo e $dh_{\varphi(p)}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo. //

Pertanto scriviamo

$\alpha \sim \beta$ se $\alpha \sim_\varphi \beta$ per qualche carta φ

$\Updownarrow$

$\alpha \sim_\varphi \beta$ per ogni carta φ.

Poniamo
$$T_pM := \mathcal{A}_p/\sim$$
se $\alpha \in \mathcal{A}_p$ la classe di equiv di α per la relazione $\sim$

la indichiamo con il simbolo
$\dot{\alpha}(0)$ e la chiamiamo "vettore tangente
ad α per $t=0$"!

Ora definiamo una applicazione

$$\Phi : T_pM \longrightarrow \mathcal{D}_p .$$

Innanzitutto definiamo una applicazione

$\tilde{\Phi} : a_p \longrightarrow \mathcal{D}_p$ mediante la
formula

$$\tilde{\Phi}(\alpha)(f_p) := \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0}$$

Dunque

$$\tilde{\Phi}(\alpha) : \mathcal{C}^\infty_p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_p \longmapsto \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0}$$

è un funzionale. Verificare che è
una derivazione! Verificare anche che
$\tilde{\Phi}(\alpha)$ è ben definita su $\mathcal{C}^\infty_p$!

<u>Lemma</u> Se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_p$

$$\alpha \sim \beta \implies \tilde{\Phi}(\alpha) = \tilde{\Phi}(\beta)$$

<u>dim</u> Per verificare che $\tilde{\Phi}(\alpha) = \tilde{\Phi}(\beta)$ devo controllare che

$$\tilde{\Phi}(\alpha)(f_p) = \tilde{\Phi}(\beta)(f_p) \qquad \forall f_p \in C_p^\infty$$

Infatti:

$$\tilde{\Phi}(\alpha)(f_p) = \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t)\Big|_{t=0}$$

Fisso una carta (U, φ) e pongo

$$\bar{f} := f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$$

$$\bar{\alpha} := \varphi \circ \alpha : I \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{idem per } \beta)$$

Allora

$$\alpha \sim \beta \implies \dot{\bar{\alpha}}(0) = \dot{\bar{\beta}}(0)$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha)(f_p) = \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \bar{f} \circ \bar{\alpha}(t)\Big|_{t=0}$$

$$= d\bar{f}_{\varphi(p)}(\dot{\bar{\alpha}}(0)) = d\bar{f}_{\varphi(p)}(\dot{\bar{\beta}}(0)) = \tilde{\Phi}(\beta)(f_p).$$

//

Grazie al lemma se pongo

$$\Phi(\dot{\alpha}(0)) := \tilde{\Phi}(\alpha)$$ ottengo una applicazione ben definita

$$\Phi : T_pM \longrightarrow \mathcal{D}_p .$$

N.B. Questa applicazione Φ non dipende dalla scelta di una carta. Φ è intrinseca.

Ora fissiamo invece una carta (U, φ) con $p \in U$.

Definiamo una applicazione

$$F_\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$$ nel modo seguente: poniamo $a := \varphi(p) \in \varphi(U)$ e supponiamo che $B(a, \varepsilon) \subset \varphi(U)$ ($\varphi(U)$ è aperto!). Per $v \in \mathbb{R}^n$ pongo

$$\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \qquad \alpha_v(t) = \varphi^{-1}(a + tv)$$

$\alpha_v \in \mathcal{A}_p$ e pongo

$F_\varphi(v) := \dot{\alpha}_v \in T_pM.$

<u>Lemma</u> $F_\varphi : \mathbb{R}^n \to T_pM$ è una applic. biunivoca.

<u>dim</u> Suriettività: sia $X \in T_pM$. Per definizione $X = \dot{\gamma}(0)$ per qualche curva $\gamma \in \mathcal{A}_p$. Sia $\overline{\gamma} = \varphi \circ \gamma$

e $v := \dot{\overline{\gamma}}(0)$ e $\alpha := \alpha_v \in \mathcal{A}_p$

allora $\overline{\alpha} := \varphi \circ \alpha$

$$\overline{\alpha}(t) = \varphi\,\alpha(t) = \varphi\varphi^{-1}(a+tv) = a + tv$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\overline{\alpha}}(0) = v = \dot{\overline{\gamma}}(0) \quad \Longrightarrow \quad \alpha \sim \gamma$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\gamma}(0).$$

Ma $F_\varphi(v) = \dot{\alpha}_v(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\gamma}(0)$

Siccome $\dot{\gamma}(0) \in T_pM$ è arbitrario F_φ è suriettiva.

Nello stesso modo si dimostra che

F_φ è iniettiva:

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ $\quad F_\varphi(v) = F_\varphi(w)$

$\Rightarrow \quad \dot{\alpha}_v(0) = \dot{\alpha}_w(0) \quad \Rightarrow \quad \alpha_v \sim \alpha_w$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha_v(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha_w(t)\Big|_{t=0}$$

ma $\quad \varphi \circ \alpha_v(t) = a + tv$

$\Rightarrow \qquad v = w. \qquad ///$

<u>Lemma</u> $\forall h \in C^\infty(B(a,\varepsilon)) \quad \exists h_i \in C^\infty(B(a,\varepsilon))$

tc

$$h_i(a) = \frac{\partial h}{\partial y^i}(a)$$

$$h(y) = h(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i(y)(y^i - a^i)$$

$\forall y \in B(a,\varepsilon)$

Infine sia $G_\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}_p$

l'applicazione $G_\varphi := \Phi \circ F_\varphi$.

Sia $e_1 - e_n$ la base standard di $\mathbb{R}^n$

Poniamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p := G_\varphi(e_i)$$

<u>Lemma</u> Se $f_p \in \mathcal{C}^\infty_p$ e $\bar{f} = f \circ \varphi^{-1}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f_p = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y^i}(a)$$

<u>dim</u> $$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = G_\varphi(e_i) = \Phi(F_\varphi(e_i))$$

$$F_\varphi(e_i) = \dot{\alpha}_{e_i}(0)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f_p) = \Phi(\dot{\alpha}_{e_i}(0))(f_p) =$$

$$= \frac{d}{dt} f(\alpha_{e_i}(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \varphi^{-1}(a + te_i)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \bar{f}(a+te_i)\Big|_{t=0} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y^i}(a).$$

///

Teorema $G_\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}_p$ e' un isomorfismo di spazi vettoriali

dim Verifichiamo che G_φ e' lineare:

$v, w \in \mathbb{R}^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad f_p \in C^\infty_p$

$$G_\varphi(\lambda v + \mu w)(f_p) =$$

$$= \frac{d}{dt} f(\varphi^{-1}(a + t(\lambda v + \mu w)))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \bar{f}(a + t(\lambda v + \mu w)) =$$

$$= d\bar{f}_a(\lambda v + \mu w) =$$

$$= \lambda\, d\bar{f}_a(v) + \mu\, d\bar{f}_a(w) =$$

$$= \lambda\, G_\varphi(v)(f_p) + \mu\, G_\varphi(w)(f_p)$$

$$= \big(\lambda\, G_\varphi(v) + \mu\, G_\varphi(w)\big)(f_p).$$

Questo vale $\forall f_{D_p}$

$$\Longrightarrow \quad G_\varphi(\lambda v + \mu w) = \lambda G_\varphi(v) + \mu G_\varphi(w).$$

Dunque G_φ è lineare. Per vedere che è un isomorfismo è sufficiente dimostrare che

$$\cancel{\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p , \ \dots , \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}} \text{ è una base di } D_p.$$

~~Siano~~ Cominciamo dalla seguente osservazione.

Indichiamo con $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la i-esima componente della carta φ, ossia supponiamo ~~che~~ che $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$.

Indichiamo poi con $y_1 - y_n$ le coordinate su $\mathbb{R}^n$; $y = (y_1 - , y_n)$. Le coordinate su $\mathbb{R}^n$ si possono considerare anche come funzioni

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(y_1 - y_n) \longmapsto y_i$$

Chiamo y_i questa funzione.

Si ha

$$x^i \circ \varphi^{-1} = y^i$$

Infatti se $y = (y_1, \dots, y_n) \in \varphi(U)$

$$y = \varphi \circ \varphi^{-1}(y)$$

ossia

$$(y^1 \dots y^n) = \left(x^1(\varphi^{-1}(y)), \dots, x^n(\varphi^{-1}(y)) \right)$$

$$\Rightarrow \quad y^i = x^i(\varphi^{-1}(y)).$$

Dunque se poniamo $\bar{x}^j = x^j \circ \varphi^{-1}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial y^i}(\varphi(p))$$

ma $\bar{x}^j = y^j$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j_p = \frac{\partial y^j}{\partial y^i}(\varphi(p)) = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j_p = \delta_{ij}}$$

Da questo segue immediatamente che $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$ — $\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ sono vettori linearmente indipendenti nello spazio $\mathcal{D}_p$. Infatti se $\lambda_1 - \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) x^j_p = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (x^j_p) =$$

$$= \sum \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j = 1 - n.$$

Ciò dimostra che G_φ è iniettiva.

Verifichiamo ora che ~~G_φ~~ i vettori

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p - , \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ è ~~un sistema~~ generano $\mathcal{D}_p$.

Osserviamo innanzitutto che se $D \in \mathcal{D}_p$ allora

$$D 1_p = D(1_p \cdot 1_p) =$$

$$(D 1_p) \cdot 1 + 1 \cdot (D 1_p) = 2 \cdot (D 1_p)$$

$$\Rightarrow \quad D 1_p = 0.$$

Poiché D è lineare segue che ~~per ogni~~ D si annulla sul germe di ogni funzione costante: $D \lambda_p = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Sia ora $D \in \mathcal{D}_p$. Poniamo

$$\lambda_i := D(x^i_p) \in \mathbb{R}.$$

Sia $f_p \in \mathcal{C}^\infty_p$ e $\bar{f} = f \circ \varphi^{-1}$

Per il Lemma posso scrivere

$$\bar{f}(y) = \bar{f}(a) + \sum_{i=1}^{n} (y^i - a^i) h_i(y)$$

dove $h_i \in C^\infty(B(a, \varepsilon))$ $\qquad a = \varphi(p)$, $B(a,\varepsilon) \subset \varphi(U)$

e $\quad h_i(a) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial y^i}(a).$

Allora per ogni ~~$q \in \varphi^{-1}(B(a,\varepsilon))$~~ ~~[illegible]~~ $q \in M$ sufficientemente vicino a p si ha

$$f(q) = \bar{f}(a) + \sum_{i=1}^{n} (y^i \circ \varphi(q) - a^i)\, h_i(\varphi(q))$$

osservo che $\bar{f}(a) = f(\varphi(p))$

$$y^i \circ \varphi(q) = x^i(q)$$

pongo $f_i := h_i \circ \varphi$

dunque

$$f = f(\varphi(p)) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i) f_i$$

$$Df_p = D\, f(\varphi(p)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big\{ D(x^i_p - a^i_p) \cdot f_i(p) + (x^i(p) - a^i)\, D(f_i)_p \Big\}$$

$f(\varphi(p)) =$ costante

$$\Rightarrow \quad D \, f(\varphi(p)) = 0$$

cost

$$D\,(x^i_p - a^i_p) = D x^i_p - D a^i_p =$$

$$= D x^i_p = \lambda_i$$

$$f_i(p) = h_i(\varphi(p)) = h_i(a) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y^i}(a) =$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f_p)$$

$$x^i(p) = a^i$$

dunque

$$D f_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i_p}(f_p) .$$

Questo vale $\forall f_p \in \mathcal{C}^\infty_p$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = \sum \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p} .$$

Pertanto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}$ genera $\mathcal{D}_p$, quindi è una base di $\mathcal{D}_p$ e

$G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}_p$ è un isomorfismo

///.

Data una carta φ abbiamo visto che

$$\begin{tikzcd} T_p M \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathcal{D}_p \\ & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "F_\varphi"] \arrow[ur, "G_\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

F_φ è biunivoca $\quad$ G_φ è biunivoca

$\Longrightarrow$ Φ è biunivoca

<u>Def</u> Su $T_p M$ consideriamo la struttura di spazio vettoriale tale che Φ sia un isomorfismo lineare.

In altre parole poniamo

$$\lambda X + \mu Y := \Phi^{-1}\big(\underbrace{\lambda \Phi(X) + \mu \Phi(Y)}\big)$$

$\uparrow$ operazioni in $\mathcal{D}_p$

per

$X, Y \in T_pM$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Con questa struttura di sp. vettoriale T_pM si chiama sp. tangente.

<u>Corollario</u> Φ è isomorfismo lineare

e $\forall$ carta φ

F_φ e G_φ sono isomorfismi lineari.

<u>dim</u> Φ è isom. lineare per costruzione.

G_φ è isomorfismo (già visto)

$F_\varphi = \Phi^{-1} \circ G_\varphi \Rightarrow$ anche lei isomorfismo ///