

SOTTOVARIETA'

(1)

Sia M^m una varietà differenziabile.

Def Un sottoinsieme $Z \subset M$ è una sottovarietà di dimensione n se $\forall p \in Z$ esiste una carta (U, φ) di M tale che $\varphi(p) = 0$ e $\varphi(Z \cap U) = \varphi(U) \cap \{x \in \mathbb{R}^m : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$

Lemma Se M^m è una ~~una~~ varietà e $Z \subset M$ è una sottovarietà n -dimensionale allora le ~~collezioni~~ ^{mappe} $(U \cap Z, \varphi|_{U \cap Z})$ al variare di (U, φ) fra tutte le carte di M come sopra, è un atlante di Z . Dunque Z è in modo naturale una varietà differenziabile.

dim Per ipotesi le carte ricoprono Z .

Se $(U, \varphi) \cap (V, \psi)$ sono due carte come nella definizione di sottovarietà,

allora

$$\varphi|_{U \cap Z} \circ (\psi|_{U \cap Z})^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V \cap Z)}$$

Pertanto le carte $(U_\alpha \mathbb{R}^n, \varphi|_{U_\alpha \mathbb{R}^n})$ (2)
e $(V_\alpha \mathbb{R}^n, \psi|_{V_\alpha \mathbb{R}^n})$ sono compatibili. ///

Def Siano M^m ed N^n varietà differenziabili
e sia $F: M \rightarrow N$ C^∞ .

Diciamo che F è una immersione se
 $\forall p \in M$ $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è iniettivo.

Diciamo che F è una sommersione se
 $\forall p \in M$ dF_p è suriettivo.

Diciamo che F è una inserzione o
embedding se $F(M)$ è una sottovarietà
di N e $F: M \rightarrow F(M)$ è un diffeo.

Def $p \in M$ è un punto critico di
 $F: M \rightarrow N$ se $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$
non è suriettivo.

Sia $\text{Crit}(F) = \{ p \in M : p \text{ è punto critico di } F \}$

Esercizio: $\text{Cit}(F)$ è un sottoinsieme chiuso.

(3)

Def: i valori regolari di $F: M \rightarrow N$ sono i punti di $N - F(\text{Cit}(F))$.

I valori critici di F sono i punti di $F(\text{Cit}(F)) \subset N$.

Teorema di Sard

Se $F: M \rightarrow N$ è una applicazione liscia, allora l'insieme dei valori regolari è denso. In particolare $\text{Cit}(F) \subsetneq N$, ossia esistono sempre valori regolari.

~~Osservazione~~

Osservazione: poiché $F(\text{Cit}(F)) \subset F(M)$

i punti $q \in N - F(M)$ sono

per definizione valori regolari!

~~Osservazione~~

Condizio Se $m < n$ una applicazione (4)
 $F: M^m \rightarrow N^n$ non può essere suriettiva

dim

Sia $p \in M$. Poiché $m < n$ l'applicazione
 lineare $df_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\dim T_p M = m$ $\dim T_{F(p)} N = n$

non può essere suriettiva.

Dunque $\text{Cit}(F) = M$.

Ma per il Teo di Sard $\exists$ un valore

regolare $q \in N - F(\text{Cit}(F)) = N - F(M)$.

$\Rightarrow F(M) \subsetneq N$.

///

Teorema del Valore regolare

(5)

Sia $M^m \xrightarrow{F} N^n \subset \mathbb{C}^\infty$ e sia $q \in N$ un valore regolare. Se $Z := F^{-1}(q) \neq \emptyset$ allora Z è una sottovarietà di dimensione $m-n$.

Dim

Sia $p \in Z$
 q è valore regolare $\Rightarrow F^{-1}(q) \cap \text{Crit}(F) = \emptyset$
 $\Rightarrow dF_p$ è suriettivo. Per il Teo del rango nel caso suriettivo $\exists$ carte (U, φ) su M (V, ψ) su N

$$F(U) \subset V \quad p \in U$$

$$\varphi(p) = 0 \quad \psi(F(p)) = \psi(q) = 0$$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = x \quad \forall x \in \varphi(U)$$

$$\Rightarrow \varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap \{x = 0\}.$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^{m-n}$$

Teorema Sia $F: M^m \rightarrow N^n$ una (6)
 immersione. Supponiamo che F sia
 iniettiva e che sia un omeomorfismo
 sull'immagine.

Allora F è un embedding.

dim

Sia $Z := F(M)$. Dobbiamo provare che
 Z è una ~~subvarietà~~ sottovarietà e che $F: M \rightarrow Z$
 è diffeom. Fisso $q \in Z$, $q = F(p)$.

Scegliamo carte (U, φ) su M , (V, ψ) su N
 tali che $p \in U$, $F(U) \subset V$

$$\varphi(p) = 0 \quad \psi(q) = 0$$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$$



questo posso
 supporlo per il
 Teo del Rango
 iniettivo

e

$$\psi(F(U)) = \psi(V) \cap \{y = 0\}$$



questo posso supporlo per
 la Osservazione dopo il Teo del rango
 iniettivo.

Siccome $F: M \rightarrow \mathbb{Z}$ è ommorfismo (7)

$F(U) \subset \mathbb{Z}$ è aperto in $\mathbb{Z}$ (per la topologia indotta). Dunque $\exists V' \subseteq N$ aperto

t.c. $F(U) = \mathbb{Z} \cap V'$.

Sia $V'' = V' \cap V$. Allora ~~allora~~

$F(U) = \mathbb{Z} \cap V''$ (infatti $F(U) \subset V$).

Inoltre (V'', ψ) è una carta di N

e

$$\psi(\mathbb{Z} \cap V'') = \psi(F(U)) = \psi(V'') \cap \{y=0\}$$

↑
perché $V'' \subset V$!

Ciò dimostra

che $\mathbb{Z}$ è una sottovarietà di N

di dimensione m

$$\left(\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^{n-m} \end{array} \right)$$

Dalla rappresentazione locale

$$\psi \circ F \circ \psi^{-1}(x) = (x, 0)$$

segue che $F: M \rightarrow \mathbb{Z}$

è rappresentata localmente da $x \mapsto x$.

Dunque $F : M \rightarrow Z$ è un offset (8)
locale + biniroco per il seguente
esercizio è un offset. //

Esercizio: Sia $F : M \rightarrow N$: un offset
locale biniroco. Allora F è offset
globale.

Corollario Sia $F: M \rightarrow N$ una
immersione ~~iniettiva~~ e propria. Allora
 F è un embedding

dim
 $F: M \rightarrow F(M) =: Z \subset N$
è biunivoca continua e chiusa
 $\Rightarrow$ omeo. //

Corollario Sia M una varietà compatta.

Se $F: M \rightarrow N$ è una immersione iniettiva,
allora F è un embedding.

dim
Se M è compatta e $F: M \rightarrow N$ è continua
allora F è anche propria (dimostrare!)
///