

Esercizio 1.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Supponiamo che esistano tre vettori v_1, v_2, v_3 a due a due linearmente indipendenti e tali che

$$B(v_1, v_1) = B(v_2, v_2) = B(v_3, v_3) = 0.$$

Dimostrare che allora $B \equiv 0$. (Suggerimento: è sufficiente provare che $B(v_1, v_2) = 0$. Scrivere $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda \neq 0, \dots$)

Svolgimento: $\{v_1, v_2\}$ è una base di V . Scriviamo $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Allora $\lambda \neq 0$ perché altrimenti v_3 sarebbe un multiplo di v_2 . Per lo stesso motivo $\mu \neq 0$. Sfruttando bilinearità e simmetria di B Calcoliamo

$$\begin{aligned} 0 &= B(v_3, v_3) = B(\lambda v_1 + \mu v_2, \lambda v_1 + \mu v_2) = \\ &= \lambda^2 B(v_1, v_1) + 2\lambda\mu B(v_1, v_2) + \mu^2 B(v_2, v_2) = \\ &= 2\lambda\mu B(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Posso dividere per λ e per μ . Quindi $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1) = 0$. B è nulla sulle coppie formate da elementi di una base, quindi è identicamente nulla.

2. Sia S una superficie regolare e siano $p \in S$ e $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che se la retta $\ell = \{p + tv, t \in \mathbb{R}\}$ è contenuta in S , allora $v \in T_p S$ e $h_p(v, v) = 0$.

Svolgimento: Poniamo $\alpha(t) = p + tv$. Allora α è una curva parametrizzata contenuta in S e $\alpha(0) = p, \dot{\alpha}(0) = v$. Per definizione $v \in T_p S$. Inoltre

$$\begin{aligned} h_p(v, v) &= h_p(\dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0)) = \\ &= \langle N(p), \ddot{\alpha}(0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

perché α è una retta.

3. Sia S è un superficie regolare connessa. Supponiamo che per ogni punto di S passino 3 rette distinte tutte contenute in S . Dimostrare che S è contenuta in un piano. (Suggerimento: applicare i due punti precedenti.)

Svolgimento: Supponiamo che $\varphi : U \rightarrow S$ sia una parametrizzazione definita su un aperto connesso $U \subset \mathbb{R}^2$. Allora su $V = \varphi(U)$ è definito un campo normale unitario $N : U \rightarrow S^2$. Siano $l_i = \{p + tv_i : t \in \mathbb{R}\}$ le tre rette. Poiché sono distinte, i vettori v_i sono a due a due linearmente indipendenti. Per il punto 2 $h_p(v_i, v_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Per il punto 1 risulta $h_p \equiv 0$. Ma allora $h_p(v, w) = \langle -dN_p(v), w \rangle = 0$ per ogni coppia $v, w \in T_p S$. Dunque per ogni $v \in T_p S$ si ha $dN_p(v) = 0$. Pertanto $dN_p = 0$ e questo vale in ogni punto $p \in U$. Quindi $N : U \rightarrow S^2$ è una applicazione costante $N(p) \equiv \bar{N}$. A questo punto si può procedere come quando si dimostra che una curva biregolare con torsione nulla è piana: fissiamo $p_0 \in V$ e poniamo $c = \langle p_0, \bar{N} \rangle$. Se $p \in V$ posso scegliere una curva parametrizzata $\alpha : [0, 1] \rightarrow V$ tale che $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p$.

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{N}, \alpha(t) \rangle = \langle \bar{N}, \dot{\alpha}(t) \rangle = 0$$

perché $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}S \perp \bar{N}$. Dunque

$$\langle \bar{N}, p \rangle = \langle \bar{N}, p_0 \rangle = c$$

ossia V è contenuto nel piano $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \bar{N} \rangle = c\}$. Per connessione tutta S è contenuta nello stesso piano.

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x, y, z) = x^2 - 16y^2 - z$$

e sia $S_1 = F^{-1}(0)$. Dimostrare che S_1 è una superficie regolare e che l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - 16v^2)$$

è una parametrizzazione globale di S_1 .

5. Dimostrare che per ogni punto p di S_1 passano 2 rette distinte contenute interamente in S_1 . (Suggerimento: fissiamo un punto $p \in S_1$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo la retta $\ell = \{p + tv, t \in \mathbb{R}\}$. Se $\ell \subset S$, allora $F(p + tv)$ è un polinomio di secondo grado in t che si annulla identicamente ...).

Svolgimento: Fissiamo $p = (x, y, z)$ e consideriamo un vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$. La retta $\ell = \{p + tv, t \in \mathbb{R}\}$ è contenuta in S se e soltanto se la funzione $G(t) = F(p + tv)$ è identicamente nulla. Osserviamo che $G = G(t)$ è un polinomio di secondo grado in t . Pertanto G è identicamente nulla se e soltanto se coefficienti del polinomio sono tutti e tre nulli. Calcoliamo

$$\begin{aligned} G(t) &= (x + tv_1)^2 - 16(y + tv_2)^2 - (z + tv_3) = \\ &= (v_1^2 - 16v_2^2)t^2 + (2xv_1 - 32yv_2 - v_3)t + (x^2 - 16y^2 - z). \end{aligned}$$

Allora $\ell \subset S$ se e soltanto se

$$\begin{cases} v_1^2 - 16v_2^2 = 0 \\ 2xv_1 - 32yv_2 - v_3 = 0 \\ x^2 - 16y^2 - z = 0. \end{cases}$$

La terza equazione dice solo che $p \in S$. Le prime due equazioni danno le condizioni su v affinché $\ell \subset S$. Se moltiplico v per un numero non nullo la retta ℓ non cambia. Quindi mi interessa v a meno di multipli. Dalla prima ricaviamo $v_1 = \pm 4v_2$. Se pongo v_2 uguale a un qualunque numero non nullo e scelgo uno dei due valori possibili per v_1 , posso ricavare v_3 dalla terza equazione.

6. Dimostrare che S_1 non ha punti ellittici.

Svolgimento: Si posso svolgere i calcoli e si trova che ogni punto di S è iperbolico. Però si può anche procedere sfruttando i punti precedenti. Per ogni punto $p \in S$ passa almeno una retta (sappiamo che infatti ce ne passano due). Quindi esiste $v \in T_pS, v \neq 0$ tale che $h_p(v, v) = 0$. Pertanto h_p non è definita né positiva, né negativa. Ma allora p non è ellittico, infatti se p avrei o $k_1 \leq k_2 < 0$ o $0 < k_1 \leq k_2$. Nel primo caso $h_p(v, v) \leq k_2|v|^2 < 0$ è definita negativa. Nel secondo caso è definita positiva. In entrambi i casi se $v \neq 0, h_p(v, v) \neq 0$.