<u>Teorema</u> Siano X ed Y spazi di Hausdorff localmente compatti e sia $p: X \longrightarrow Y$ un omeomorfismo locale proprio.
Supponiamo che Y sia connesso e localmente connesso per archi.
Allora p è un rivestimento.

<u>dim</u>

p è omeo locale $\Rightarrow$ è aperta.
p è propria $\Rightarrow$ p è chiusa
Dunque $p(X) \subset Y$ è aperto e chiuso

$\Rightarrow$ $p(X) = Y$ perché Y è connesso

(ovviamente supponiamo $X \neq \emptyset \Rightarrow p(X) \neq \emptyset$).
Dunque p è suriettiva.
Poiché p è un omeomorfismo locale anche X è localmente connesso per archi.
Per dimostrare che p è un rivestimento resta da verificare che ogni $y \in Y$ ammette un intorno banalizzante.

Dato $y \in Y$ la fibra $F = p^{-1}(y)$ è un sottoinsieme discreto perché p è un omeomorfismo locale, ma anche compatto perché p è propria.

Dunque F è uno spazio topologico discreto e compatto $\Rightarrow$ è finito.

Sia $F = \{x_1, x_2 - x_n\}$.

$\forall i$ $\exists$ U_i = intorno connesso per archi di x_i t.c. $p(U_i)$ sia aperto in Y e t.c.

$p|_{U_i} : U_i \longrightarrow p(U_i)$ sia un omeo.

Restringendo posso supporre $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Sia $A := \left(\bigcap_{i=1}^{n} p(U_i)\right) - p\left(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$.

$y \in p(U_i)$ $\forall i$.

Inoltre $p^{-1}(y) = \{x_1 - x_n\} \subset \bigcup U_i$

$\Rightarrow$ $y \notin p\left(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$.

Dunque $y \in A$.

Inoltre A è aperto.

Infatti $X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ è chiuso in X

e p è chiusa perché è propria.

Dunque $p(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i) \subset Y$ è chiuso

$\Rightarrow$ A è aperto.

Poiché Y è localmente connesso per archi $\exists$ un aperto connesso per archi

V tc $y \in V \subseteq A$.

Verifichiamo che V è banalizzante

Poniamo

$$W_i := p^{-1}(V) \cap U_i$$

a) $p(W_i) = V$

Infatti $p(W_i) \subset V$ perché $W \subset p^{-1}(V)$.

Se $y' \in V \subset p(U_i)$ $\exists$ $x' \in U_i$ tc.

$p(x') = y'$. Dunque $x' \in W_i$

$\Rightarrow$ $p(W_i) \supseteq V$.

b) $p|_{W_i} : W_i \longrightarrow V$ è un omeo

Infatti è la restrizione a

$W_i = \left(p|_{U_i}\right)^{-1}(V)$ dell'omeomorfismo

$p|_{U_i} : U_i \longrightarrow p(U_i)$.

c) W_i è aperto in X: per definizione

d) W_i è connesso: segue da b

e) $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$

ovvio perché $W_i \subset U_i$ e gli U_i sono a due a due disgiunti

f) $p^{-1}(V) = \bigsqcup W_i$

Infatti $\bigsqcup W_i \subset p^{-1}(V)$ per costruzione.

D'altronde sia $x \in p^{-1}(V)$.

Allora $p(x) \in V \subseteq A$

$\Rightarrow p(x) \notin p\left(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$.

$\Rightarrow x \notin X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i$

cioè $x \in \bigcup U_i$.

Dunque $x \in V \cap (\bigsqcup U_i) = \bigsqcup W_i$.

Ora da (f) (d) e (c) segue che W_i sono le componenti connesse di $p^{-1}(V)$ (dimostrare!)

Dunque da (b) segue che V è banalizzante //

<u>Corollario</u> Siano M ed N varietà diff. Supp. N connessa. Sia $F: M \longrightarrow N$ una applicazione C^∞ propria. Se $\dim M = \dim N$ e $\mathrm{Crit}(F) = \emptyset$ allora F è un rivestimento

<u>dim</u>

Se $\dim M = \dim N$ e $\mathrm{Crit}(F) = \emptyset$, allora $\forall p \in M$ dF_p è isomorfismo. Per il Teorema della Funzione Inversa F è un diffeo locale $\Rightarrow$ omeo locale. Basta applicare il Teorema //

<u>Corollario</u> Siano M ed N varietà C^∞.
Supp. M compatta, N connessa
e $\dim M = \dim N$. Sia $F: M \to N$ C^∞.
Se $Crit(F) = \emptyset$, allora F è un
rivestimento

<u>dim</u> F è propria perché M è compatta.

<u>Osservazione</u> Se M ed N sono varietà
differenziabili (con N connessa) e
$p: M \to N$ è un rivestimento,
diciamo che p è un <u>rivestimento liscio</u> se $\forall$ aperto banalizzante $V \subset N$
e per ogni componente connessa U
di $p^{-1}(V)$, l'omeomorfismo

$$p|_U : U \to V \quad \text{è un diffeo.}$$

In particolare se p è un rivestimento liscio, allora p è una applic C^∞ ed è un diffeo locale.

<u>Lemma</u> Sia $p: M \longrightarrow N$ un rivestimento con M ed N varietà differenziabili ed N connesse. Allora p è un rivestimento liscio $\Longleftrightarrow$ è un diffeo locale

<u>dim</u>

Abbiamo già visto "$\Longrightarrow$"
Supponiamo dunque che p sia un diffeo loc.
Se $V \subset N$ è un aperto banalizzante e $U \subset p^{-1}(V)$ è una componente connessa allora

$$p|_U : U \longrightarrow V \text{ è un}$$

omeomorfismo e anche un diffeomorfismo locale $\Longrightarrow$ è un diffeo.

///

Esercizio verificare che nei Corollari a p.6 e p.7 F e' un rivestimento liscio.

Sia M^n = varietà differenziabile e G un gruppo che agisce a sinistra su M;

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

Def diciamo che l'azione è liscia se $\forall g \in G$ l'applicazione

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

e' un diffeomorfismo.

In altre parole una azione sinistra liscia e' un morfismo di gruppi

$G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ = gruppo dei diffeomorfismi di M

Teorema Sia M^n una varietà e $G \curvearrowright M$. Supp. che l'azione di G sia liscia e propriamente discontinua. Sia $X := M/G$ e $\pi : M \longrightarrow X$ la proiezione canonica. Se X è di Hausdorff e connesso, allora su X esiste una ed una sola struttura differenziabile tale che $\pi : M \longrightarrow X$ sia un rivestimento liscio.

dim Per ipotesi X è di Hausdorff. Inoltre sappiamo che $\pi : M \longrightarrow X$ è un rivestimento. Dunque X è localmente euclideo, cioè localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.

Verifichiamo che X ha una base numerabile. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di M. Poniamo

$$\mathcal{B}' := \{ \pi(A) \ : \ A \in \mathcal{B} \}$$

Allora $\mathcal{B}'$ è una base numerabile della topologia di X (dimostrare!).

Definiamo ora una struttura differenziabile su X.

~~Sia $V \subset X$ un aperto banalizzante per il rivestimento $\pi : M \to X$. Se $U \subset \pi^{-1}(V)$ è una componente connessa di~~

Consideriamo le terne (V, U, φ) dove $V \subset X$ è un aperto banalizzante, $U \subset \pi^{-1}(V)$ è una componente connessa di $\pi^{-1}(V)$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è una carta C^∞ di M definita su U. Data una terna come questa, definiamo una carta

$$\varphi \circ (\pi|_U)^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Poiché $\pi|_U : U \to V$ è omeo $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$ è un omeo di V sull'aperto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Dunque $(V, \varphi \circ (\pi|_U)^{-1})$ e' una carta su X.

Vogliamo dimostrare che queste carte definiscono una struttura differenziabile su X.

Dobbiamo pertanto verificare che queste carte sono fra loro compatibili.

Siano (V, U, φ) e (V', U', ψ) due terne come sopra.

Per verificare la compatibilità possiamo supporre $V = V'$.

Allora U ed U' sono due componenti connesse di $\pi^{-1}(V)$. Poiché $X = M/G$ e l'azione $G \curvearrowright M$ e' propriamente discontinua, $\exists g \in G$ t.c $U' = gU$. Inoltre il diagramma

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\pi|_U"] & \\
gU = U' \arrow[r, "\pi|_{U'}"'] & V
\end{tikzcd}$$

commuta

Dunque
$$\pi|_U = \pi|_{U'} \circ g$$
Per verificare che le due carte
$$\left(V, \varphi\circ(\pi|_U)^{-1}\right) \quad e \quad \left(V, \psi\circ(\pi|_{U'})^{-1}\right)$$
sono compatibili consideriamo il cambiamento di carta:

$$\psi\circ(\pi|_{U'})^{-1}\circ\left(\varphi\circ(\pi|_U)^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \psi\circ(\pi|_{U'})^{-1}\circ \pi|_U \circ\varphi^{-1} =$$

$$= \psi\circ(\pi|_{U'})^{-1}\circ \pi|_{U'}\circ g\circ\varphi^{-1} =$$

$$= \psi\circ g\circ\varphi^{-1}$$

questa è la rappresentazione locale di g nelle carte (U,φ) e (U',ψ) su M $\Rightarrow$ $\psi\circ g\circ\varphi^{-1}\in C^\infty$

$\Rightarrow$ le carte sono compatibili dunque definiscono una struttura diff su X.

Verifichiamo adesso che se fissiamo su X la struttura differenziabile appena definita, allora π è un rivestimento liscio.

Infatti se (V, U, φ) è una terna come sopra, pongo $\psi := \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$

Allora (U, φ) è una carta su M

(V, ψ) è (per costruzione) una carta su N

e $\pi(U) = V$, mentre la rappresentazione locale di π è

perché φ^{-1} ha immagine in U

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1} \circ \pi|_U \circ \varphi^{-1} =$$

$$= id : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U)$$

$\Longrightarrow$ π è liscia e $\pi|_U : U \to V$ è diffeo.

Ora rimane solo da verificare l'unicità della struttura diff.

Questa discende dal seguente Lemma.

Lemma Sia M una varietà diff, X uno spazio di Hausdorff e $f: M \to X$ un omeomorfismo locale. Allora esiste al più una struttura differenziabile su X t.c. f sia un diffeo locale

dim Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ due strutture diff t.c. f sia un diffeo locale. Per verificare che $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ si deve controllare che se $(V, \psi) \in \mathfrak{A}$ e $(V', \psi') \in \mathfrak{A}$ allora (V, ψ) e (V', ψ') sono compatibili

~~Possiamo supporre $V = V'$. Inoltre poiché la compatibilità è un fatto locale, è sufficiente considerare il caso in cui $V = f(U)$ per $U \subseteq M$ aperto t.c. $f|_U$ t.c. $\exists$ una carta $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ di M definita su U.~~

~~(dimostrare che è sufficiente questo caso!)~~

Poiché la compatibilità è un fatto locale possiamo limitarci al caso di V un aperto molto piccolo.

In particolare possiamo supporre (Restringendo) che

esista $U \subseteq M$ aperto

t.c. $f|_U : U \longrightarrow V$ è diffeo per $\mathfrak{A}$

e anche per $\mathfrak{A}'$

ed $\exists$ una carta φ di M definita

su U.

Allora

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è C^∞ perché f è diffeo per $\mathfrak{A}$

$\psi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ è C^∞ perché f è diffeo per $\mathfrak{A}'$

questa inoltre è invertibile

$$\Rightarrow \quad \psi \circ \psi'^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\psi' \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}$$

è C^∞

$\Rightarrow$ le due carte sono compatibili

$\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. ///

Teorema Sia $\pi : M^m \to N^n$ una sommersione suriettiva. Allora

(1) π è una identificazione aperta

(2) se

$$M \xrightarrow{f} Q$$

è una mappa C^∞ da M in una varietà Q e f è costante sulle fibre di π, allora $\exists\, g : N \to Q$ t.c.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Q \\ N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

e g è C^∞

dim

(1) è sufficiente provare che π è aperta (infatti è continua e suriettiva!). Questo discende dal teorema del rango (caso suriettivo): π è localmente data dalla proiezione $\overline{\pi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
$$\overline{\pi}(x_1 - x_m) = (x_1 - x_n).$$

Siccome $\bar{\pi}$ è aperta, π è aperta.

Basta provare che g è liscio.

(2) Siano (U,φ) (V,ψ) (W,η)

carte su M N Q

t.c. $\pi(U)\subset V$ $f(U)\subset W$

$$\bar{\pi} := \psi\circ\pi\circ\varphi^{-1}$$

$$\bar{f} = \eta\circ f\circ\varphi^{-1}$$

$$g = \eta\circ g\circ\psi^{-1}$$

Se scelgo (U,φ) e (V,ψ) in modo furbo (cioè applicando il Teorema del rango) posso supporre

$$\bar{\pi}(x_1 \_\_ x_m) = (x_1 \_\_ x_n).$$

f cost. sulle fibre di π

$\Rightarrow$ $\bar{f}$ è cost sulle fibre di $\bar{\pi}$

e il diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} \varphi(U) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{\pi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \eta(W) \\ \psi(V) \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque $\bar{f}(x_1 - x_m)$ dipende solo da $x_1 - x_n$

e $\bar{g}(x_1 - x_n) = \bar{f}(x_1 - x_n)$

è C^∞

///