

Partizioni dell'unità

Alessandro Ghigi

29 ottobre 2014

Indice

1	Funzioni lisce a supporto compatto	1
2	Ricoprimenti localmente finiti	5
3	Partizioni dell'unità	6

1 Funzioni lisce a supporto compatto

Lemma 1. *Siano $f \in C^1(a, b)$ e $g \in C^1(b, c)$. Supponiamo che esistano numeri $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = y_0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g'(x) = y_1. \quad (2)$$

Allora la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ y_0 & x = b \\ g(x) & x \in (b, c) \end{cases} \quad (3)$$

è di classe C^1 su (a, b) e la sua derivata è data da

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in (a, b) \\ y_1 & x = b \\ g'(x) & x \in (b, c) \end{cases} \quad (4)$$

Dimostrazione. La formula (1) dice che la funzione F è continua su (a, b) . Sappiamo inoltre che F è C^1 su (a, b) e su (b, c) e che la derivata F' è ivi data dalla formula (4). Resta da provare che F è derivabile anche in b e che la derivata $F'(b) = y_1$. Seguirà immediatamente dalla (2) che F' è continua su tutto (a, c) , cioè che $F \in C^1(a, c)$. Per la definizione di F applicando il teorema di de l'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = y_1.$$

Analogamente si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = y_1.$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = y_1.$$

Pertanto F è derivabile in b e $F'(b) = y_1$. □

Proposizione 2. Sia $k \in \mathbb{N}$. Siano $f \in C^k(a, b)$ e $g \in C^k(b, c)$. Supponiamo che esistano numeri $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ tali che per $i = 0, 1, \dots, k$ si abbia

$$\lim_{x \rightarrow b^-} D^i f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} D^i g(x) = y_i. \quad (5)$$

Allora la funzione definita dalla formula (3) è di classe C^k su (a, b) .

Dimostrazione. Il risultato è noto per $k = 0$. Procediamo per induzione su $k \geq 1$. Per $k = 1$ è stato dimostrato nel lemma precedente. Procediamo per induzione su k . Sia $k > 1$ e supponiamo (ipotesi induttiva) che il risultato sia vero per incollamenti di funzioni C^{k-1} . Siano f e g due funzioni che soddisfano le ipotesi della proposizione. Poiché $k > 1$, esse soddisfano anche le ipotesi del lemma precedente. Pertanto $F \in C^1(a, b)$. Per l'ipotesi induttiva applicata alle funzioni f' e g' , la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in (a, b) \\ y_1 & x = b \\ g'(x) & x \in (b, c) \end{cases}$$

è C^{k-1} su (a, c) . Ma per la (4) $\varphi = F'$. Dunque $F' \in C^{k-1}(a, c)$, ossia $F \in C^k(a, c)$. □

Corollario 3. Siano $f \in C^\infty(a, b)$ e $g \in C^\infty(b, c)$. Supponiamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ esista un numero $y_i \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow b^-} D^i f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} D^i g(x) = y_i. \quad (6)$$

Allora la funzione definita dalla formula (3) è di classe C^∞ su (a, b) .

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente per ogni $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita dalla formula

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0. \end{cases}$$

Allora $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $f \in C^\infty((-\infty, 0))$ la funzione identicamente nulla e $g \in C^\infty((0, \infty))$ la funzione $g(x) = e^{-1/x}$. Dimostreremo che F è C^∞ applicando il corollario precedente alle funzioni f e g . È necessario dimostrare che i limiti delle derivate m -esime di f e di g per $x \rightarrow 0$ esistono, sono finiti e coincidono. Poiché le derivate di f sono identicamente nulle, è sufficiente dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} D^m g(x) = 0.$$

Cominciamo dimostrando che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio $p_m(t) \in \mathbb{R}[t]$ tale che

$$D^m g(x) = p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}. \quad (7)$$

Procediamo per induzione su m . Se $m = 0$ la formula (7) è vera se si sceglie il polinomio (costante) $p_0(t) = 1$. Supponiamo vera la formula (7) per m e calcoliamo

$$\begin{aligned} D^{m+1} g(x) &= D \left[p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \right] = \\ &= p'_m\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x^2} + \frac{1}{x^2} p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$p_{m+1}(t) = -t^2 p'_m(t) + t^2 p_m(t).$$

Allora p_{m+1} è ancora un polinomio e

$$D^{m+1}g(x) = p_{m+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

È così provata la (7). A questo punto possiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} D^m g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{p_m(y)}{e^y} = 0.$$

È così provato che tutte le derivate di f e di g tendono a 0 per $x \rightarrow 0$, dunque il corollario precedente assicura che $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. $\square$

Definizione 5. Se X è uno spazio topologico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, il **supporto** di f è l'insieme

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Corollario 6. Esiste una funzione monotona crescente $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ e $f^{-1}(1) = [1, +\infty)$.

Dimostrazione. Indichiamo con F una qualunque funzione liscia su tutto l'asse reale e tale che $F(x) = 0$ per $x < 0$ ed $F(x) > 0$ per $x > 0$. Il teorema precedente assicura l'esistenza di tali funzioni. Poniamo

$$\psi(x) = F(x)F(1-x).$$

La funzione ψ è liscia su tutto $\mathbb{R}$, è strettamente positiva su $(0, 1)$ e $\text{supp}(\psi) = [0, 1]$. Sia

$$h(x) = \int_0^x \psi(\xi) d\xi.$$

Allora $h(x) = 0$ per $x < 0$, mentre per $x \geq 1$, $h(x) = h(1) > 0$. Inoltre h è crescente su $\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente su $[0, 1]$. Quindi $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < h(x) < h(1)$. La funzione

$$f(x) = \frac{h(x)}{h(1)}$$

ha le proprietà desiderate. $\square$

Corollario 7. Esiste una funzione $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\eta(x) = 1$ se e solo se $|x| \leq 1$ e $\text{supp}(\eta) = \overline{B(0, 2)}$.

Dimostrazione. Sia f la funzione costruita nel Corollario precedente. Poniamo $\eta(x) := f(2 - |x|)$. La norma è una funzione liscia su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dunque η è liscia su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ma $|x| \leq 1 \Leftrightarrow 2 - |x| \geq 1 \Leftrightarrow \eta(x) = 1$. Per lo stesso motivo $\text{supp}(\eta) = \overline{B(0, 2)}$. Siccome $\eta \equiv 1$ su $B(0, 1)$, η è liscia anche in 0. Dunque η ha le proprietà desiderate. $\square$

2 Ricoprimenti localmente finiti

Questa sezione viene da [1, p. 187].

Proposizione 8. *Ogni varietà differenziabile ammette una base numerabile formata da insiemi relativamente compatti.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B}$ la famiglia degli aperti della forma $\varphi^{-1}(B(x, r))$ dove (U, φ) è una carta su M e $\overline{B(x, r)} \subset \varphi(U)$. Questi aperti sono relativamente compatti perché $\overline{\varphi^{-1}(B(x, r))} = \varphi^{-1}(\overline{B(x, r)})$. È facile verificare che questa famiglia di aperti è una base della topologia di M . Sia poi $\mathfrak{B}'$ una qualunque base numerabile di M . Allora la famiglia $\mathfrak{B}''$ formata dagli elementi di $\mathfrak{B}'$ che sono contenuti in qualche elemento di $\mathfrak{B}$ è ancora una base ed è numerabile perché $\mathfrak{B}'' \subset \mathfrak{B}'$. Se $V'' \in \mathfrak{B}''$, per definizione esiste un elemento $V \in \mathfrak{B}$ tale che $V'' \subset V$. Dunque $\overline{V''} \subset \overline{V}$. Quindi $\overline{V''}$ è compatto. $\mathfrak{B}''$ è la base cercata. $\square$

Lemma 9. *Su ogni varietà differenziabile M esiste una esaustione in compatti, ossia una successione di compatti $K_1, K_2, \dots$ tali che $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ per ogni i e $\bigcup_i K_i = M$.*

Dimostrazione. Sia $\{P_i\}$ la base costruita nel lemma precedente. Poniamo $K_1 := \overline{P_1}$. Supponiamo induttivamente di avere costruito i compatti $K_1 \subset K_2^\circ \subset K_2 \subset K_3^\circ \subset \dots \subset K_i^\circ \subset K_i$. Sia $r > 0$ un numero tale che $K_i \subset P_1 \cup \dots \cup P_r$. Poniamo $K_{i+1} := \overline{P_1 \cup \dots \cup P_r}$. Allora $K_i \subset K_{i+1}^\circ$. Procedendo in questo modo otteniamo una successione di compatti che soddisfa per costruzione la prima richiesta. Poiché $\bigcup_i P_i \subset \bigcup_i K_i$, anche la seconda proprietà è verificata. $\square$

Definizione 10. *Se $\mathfrak{A}$ è un ricoprimento aperto di M , diciamo che un altro ricoprimento aperto $\mathfrak{B}$ è un raffinamento di $\mathfrak{A}$ se per ogni $B \in \mathfrak{B}$ esiste $A \in \mathfrak{A}$ tale che $A \subset B$.*

Definizione 11. *Una famiglia $\mathfrak{F}$ di sottoinsiemi di M è localmente finita se per ogni $x \in M$ esiste un intorno W di x che interseca solo un numero finito di elementi di $\mathfrak{F}$.*

Lemma 12. *Se $\mathfrak{A}$ è un ricoprimento aperto di una varietà M , allora esiste una successione di carte (U_i, φ_i) di M tali che*

1. $\{U_i\}$ è un raffinamento numerabile localmente finito di $\mathfrak{A}$;
2. $\varphi_i(U_i) = B(0, 3)$;

3. gli aperti $V_i := \varphi_i^{-1}(B(0,1))$ ricoprono M .

Dimostrazione. Sia $\{K_i\}$ una esaustione in compatti. Poniamo $K_{-1} = K_0 = \emptyset$. Per ogni $i = 0, 1, 2, \dots$ facciamo la seguente costruzione. Supponiamo che $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Per ogni $\alpha \in I$ e per ogni $p \in (\mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}) \cap A_\alpha$ scegliamo una carta $(U_{p,\alpha}, \varphi_{p,\alpha})$ tale che

1. $p \in U_{p,\alpha} \subset (\mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}) \cap A_\alpha$;
2. $\varphi_{p,\alpha}(p) = 0$;
3. $\varphi_{p,\alpha}(U_{p,\alpha}) = B(0,3)$

Possiamo sempre trovare una carta del genere. Basta scegliere una carta qualsiasi attorno a p , restringere il dominio, comporre con una traslazione e una dilatazione e quindi restringere di nuovo il dominio. Poniamo

$$V_{p,\alpha} := \varphi_{p,\alpha}^{-1}(B(0,1)).$$

Gli aperti $V_{p,\alpha}$ formano un ricoprimento di $\mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}$. Siccome $K_{i+1} - \mathring{K}_i$ è un compatto contenuto in $\mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}$, possiamo trovare degli aperti $V_{p_1,\alpha_1}, \dots, V_{p_{n_i},\alpha_{n_i}}$ che ricoprono $K_{i+1} - \mathring{K}_i$. Poniamo per semplicità $V_{i,k} := V_{p_k,\alpha_k}$, $U_{i,k} := U_{p_k,\alpha_k}$, $\varphi_{i,k} := \varphi_{p_k,\alpha_k}$. Ricapitolando, per ogni $i = 0, 1, 2, \dots$ abbiamo trovato delle carte $\varphi_{i,k} : U_{i,k} \rightarrow B(0,3)$, $k = 1, \dots, n_i$, tali che $U_{i,k} \subset A_\alpha$ per un certo $\alpha \in I$, $U_{i,k} \subset \mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}$. Inoltre gli aperti $V_{i,k} = \varphi_{i,k}^{-1}(B(0,1))$ ricoprono $K_{i+1} - \mathring{K}_i$. Segue immediatamente che

$$M = \bigcup_{i=0}^{\infty} (K_{i+1} - \mathring{K}_i) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n_i} V_{i,k}$$

per cui $\{V_{i,k}\}$ e $\{U_{i,k}\}$ sono ricoprimenti aperti di M . Inoltre sono raffinamenti di $\mathfrak{A}$. Resta da dimostrare che $\{U_{i,k}\}$ è localmente finito. Osserviamo che $U_{j,k} \cap \mathring{K}_i \neq \emptyset \Rightarrow j \leq i$. Infatti se $j > i$, si ha $K_i \subset K_{j-1}$ dunque $U_{j,k} \cap \mathring{K}_i \subset (\mathring{K}_{j+2} - K_{j-1}) \cap \mathring{K}_i \subset K_i - K_{j-1} = \emptyset$. Dato $x \in M$ scegliamo i tale che $x \in \mathring{K}_i$. Allora gli aperti $U_{j,k}$ con $j > i$ non intersecano l'intorno $\mathring{K}_i$ di x . Quindi gli aperti che lo intersecano sono in numero finito. $\square$

3 Partizioni dell'unità

Teorema 13. *Sia $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di M . Allora esiste una successione di funzioni $\{f_i\} \subset C^\infty(M)$ tali che*

1. $f_i \geq 0$;
2. $\text{supp}(f_i)$ è compatto;
3. la famiglia $\{\text{supp}(f_i)\}$ è localmente finita;
4. per ogni i c'è un $\alpha \in I$ tale che $\text{supp}(f_i) \subset A_\alpha$;
5. $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \equiv 1$.

Dimostrazione. Scegliamo (U_i, φ_i) e V_i come nel Lemma 12. Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\eta(x) = 1$ se $|x| \leq 1$ e $\eta(x) = 0$ se $|x| \geq 2$. Definisco $g_i \in C^\infty(M)$ nel modo seguente:

$$g_i(p) := \begin{cases} \eta(\varphi_i(p)) & \text{se } p \in U_i \\ 0 & \text{se } p \in M \setminus \varphi_i^{-1}(\overline{B(0,2)}). \end{cases}$$

Su $U_i \setminus \varphi_i^{-1}(\overline{B(0,2)})$ le due definizioni coincidono, dunque g_i è ben definita. D'altronde è liscia sia su U_i che su $M \setminus \varphi_i^{-1}(\overline{B(0,2)})$, quindi è liscia dappertutto. Evidentemente $g_i \geq 0$. Il supporto di g_i è un chiuso contenuto in $\varphi_i^{-1}(\overline{B(0,2)})$, dunque è compatto. Siccome $\text{supp}(g_i) \subset U_i$, la famiglia $\{\text{supp}(g_i)\}$ è localmente finita, perché $\{U_i\}$ è localmente finito. Quindi $g := \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ è una funzione liscia perché localmente è una somma finita di funzioni lisce. Siccome esiste α tale che $U_i \subset A_\alpha$, anche $\text{supp}(g_i) \subset A_\alpha$. Ora osserviamo che $M = \bigcup_i V_i$ e $g_i \equiv 1$ su V_i . Quindi $g(p) > 0$ per ogni $p \in M$. Poniamo $f_i := g_i/g$. Allora $\text{supp}(f_i) = \text{supp}(g_i)$, quindi tutte le proprietà dimostrate continuano a valere per le funzioni $\{f_i\}$. Inoltre

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1.$$

□

Lemma 14. *Sia X uno spazio topologico e sia $E \subset X$ un insieme con la seguente proprietà: per ogni $x \in X$ esiste un intorno V_x tale che $E \cap V_x$ è chiuso in V_x . Allora E è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $x \in \bar{E}$. Allora $x \in \bar{E} \cap V_x$. Ma $\bar{E} \cap V_x$ è la chiusura di $E \cap V_x$ in V_x e $E \cap V_x$ è chiuso in V_x . Pertanto $\bar{E} \cap V_x = E \cap V_x$. Dunque $x \in E$. □

Lemma 15. *Sia X uno spazio topologico e sia $\{F_i\}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi. Allora anche $F := \bigcup_i F_i$ è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia W un intorno tale che $I(x) := \{i : W \cap F_i \neq \emptyset\}$ sia finito. Allora

$$F \cap W = \bigcup_{i \in I(x)} F_i \cap W,$$

che è chiuso in W perché è una unione finita di chiusi. Per il lemma precedente F è chiuso. $\square$

Teorema 16. *Sia $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di M . Allora esiste una famiglia di funzioni $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset C^\infty(M)$ tali che*

1. $f_\alpha \geq 0$;
2. la famiglia $\{\text{supp}(f_\alpha)\}$ è localmente finita;
3. per ogni $\alpha \in I$ si ha $\text{supp}(f_\alpha) \subset A_\alpha$;
4. $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha \equiv 1$.

Dimostrazione. Scegliamo una successione di funzioni $\{f_i\}$ come nel Teorema 13. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste un $\alpha \in I$ tale che $\text{supp}(f_i) \subset A_\alpha$. Scegliamo un tale α e chiamiamolo $\tau(i)$. In questo modo abbiamo definito una funzione $\tau : \mathbb{N} \rightarrow I$ tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha $\text{supp}(f_i) \subset A_{\tau(i)}$. Ora poniamo

$$f_\alpha := \sum_{i \in \tau^{-1}(\alpha)} f_i,$$

dove si intende che $f_\alpha = 0$ se $\alpha \notin \tau(\mathbb{N})$. Le proprietà (1) e (4) sono ovvie. Ci restano da dimostrare le proprietà (2) e (3). Sia $p \in M$ e sia W un intorno di p tale che $\text{supp}(f_i) \cap W = \emptyset$ se $i \geq i_0$. Allora $\text{supp}(f_\alpha) \cap W = \emptyset$ se $\alpha \notin \tau(\{1, 2, \dots, i_0\})$. Dunque la famiglia $\{\text{supp}(f_\alpha)\}$ è localmente finita. Infine osserviamo che l'insieme $\{p \in M : f_\alpha(p) \neq 0\}$ è contenuto nell'insieme

$$F := \bigcup_{i \in \tau^{-1}(\alpha)} \text{supp}(f_i).$$

Questo insieme è una unione localmente finita di chiusi, dunque è un chiuso. Pertanto anche $\text{supp}(f_\alpha) \subset F$. Ma $F \subset A_\alpha$. Ciò dimostra la proprietà (3). $\square$

Una famiglia di funzioni come le $\{f_i\}$ del Teorema 13 o una famiglia di funzioni come le $\{f_\alpha\}$ del Teorema 16 è chiamata una *partizione dell'unità* subordinata al ricoprimento $\mathfrak{A}$.

Riferimenti bibliografici

- [1] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.