

Lemma Siano M^m ed N^n varietà differenziabili e sia $Z \subset N$ una sottovarietà $\dim Z = k$.

Sia $f: M \rightarrow Z$ una applicazione qualsiasi. Indichiamo con

$i: Z \hookrightarrow N$ l'inclusione. Allora

$$f \text{ è } C^\infty \iff g := i \circ f: M \rightarrow N \text{ è } C^\infty$$

dim

i è C^∞ (anzi è un embedding di Z in N)

dunque se f è $C^\infty \Rightarrow g = i \circ f$ è C^∞ .

Viceversa supponiamo che g sia C^∞ .

Sia $p \in M$. Scegliamo un intorno di N vicino a $\psi(p) \in Z \subset N$ e adattato alla sottovarietà Z , cioè tc.

$$\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$\psi(V \cap Z) = \psi(V) \cap \underbrace{\mathbb{R}^k \times \{0\}}_{\cap \mathbb{R}^n}$$

~~Allora~~ Indico con $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la (2)
proiezione sulle prime k coordinate:

$$\pi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_k).$$

Allora

$$\pi \circ \psi|_{V \cap Z}: V \cap Z \rightarrow \mathbb{R}^k$$

è una carta di Z . (Questo è proprio il modo in cui si definisce la struttura differenziabile su una sottovarietà.)

Scego una carta (U, φ) su M vicino a p tale che $g(U) \subset V$.

$$(\Rightarrow g(U) = f(U) \subset V \cap Z).$$

Allora ~~pongo~~ $\bar{g} := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$

$$\bar{f} := \pi \circ \psi|_{V \cap Z} \circ f \circ \varphi^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{f} = \pi \circ \bar{g}.$$

~~Se~~ $g \in C^\infty \Rightarrow \bar{g} \in C^\infty$

$$\Rightarrow \bar{f} \in C^\infty$$

$\Rightarrow f \in C^\infty$ su U . Poiché p è
arbitrario $f \in C^\infty$ su M . ③

14

Sia $Z \subset M$ una ~~subvarietà~~ ^{submanifold}. Indichiamo
con $i: Z \hookrightarrow M$ l'inclusione.
Sappiamo che i è un embedding. In
particolare $\forall p \in Z$ $di_p: T_p Z \rightarrow T_p M$
è iniettivo. Dunque $T_p Z$ può essere
identificato tramite di_p con un
sottospazio di $T_p M$, ossia $di_p(T_p Z)$.
Questa identificazione è molto semplice da
descrivere se si ~~considerano~~ ^{interpretano} i vettori come
vettori tangenti alle curve.

Sia $v \in T_p Z$ e sia $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Z$
una curva C^∞ t.c. $v = \dot{\alpha}(0)$ $p = \alpha(0)$.
Allora (per la definizione di differenziale)
 $di_p(v) :=$ il vettore tangente alla curva
 $i \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$.

In altre parole

$$\text{dip}(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} i(\alpha(t))$$

questo simbolo indica per l'appunto
il vettore tangente alla curva $i \circ \alpha$
ossia la sua classe di equivalenza
in $T_p M$.

Lemma Siano M^m ed N^n varietà
differenziabili e sia $F \in C^\infty(M, N)$.

Sia $q \in N$ un valore regolare di
 F e sia $Z := F^{-1}(q)$.

Supponiamo $Z \neq \emptyset$ (sappiamo che
allora Z è una sottovarietà di
dimensione $m-n$).
~~Se q è un valore regolare di F~~

Sia $p \in Z$. Se identifichiamo $T_p Z$ con
 $\text{dip}(T_p Z) \subset T_p M$ come descritto sopra,
allora $T_p Z = \text{Ker } dF_p$.

dim

$$dF_p: T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

(5)

F è suriettivo per cui $F(p) = q$ e q per ipotesi è valore regolare.

$\Rightarrow$ per la formula di Grassmann

$$\dim \ker dF_p = m - n.$$

$$\dim T_p Z = \dim Z = m - n.$$

Quindi è sufficiente provare che $T_p Z \subset \ker dF_p$.

Sia $v \in T_p Z$ allora $v = \dot{\alpha}(0)$ per una curva differenziabile $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Z$.

Quindi

$$dF_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\alpha(t))$$

(~~ossia~~ ossia $dF_p(v)$ è il vettore tangente alla curva $t \mapsto F(\alpha(t))$).

$$\text{Però } \alpha(t) \in Z = F^{-1}(q) \Rightarrow F(\alpha(t)) = q$$

$$\Rightarrow dF_p(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker dF_p.$$