Invarianza omotopica dell'omologia singolare.

Alessandro Ghigi

28 novembre 2017

Dati due complessi di gruppi abeliani (A_*, ∂_*) e (D_*, δ_*) consideriamo due morfismi $f, g : A_* \to D_*$. Un *operatore di omotopia* fra f e g è una collezione di morfismi $h_n : A_n \to D_{n+1}$ tali che

$$\delta_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n = g_n - f_n.$$

Se poniamo $\varphi_i = g_i - f_i$ possiamo visualizzare quel che succede nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dl, "h_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Lemma 1. *Se esiste un operatore di omotopia fra f e g, allora i morfismi indotti in omologia coincidono: $f_* = g_* : H_*(A_*, \partial_*) \to H_*(D_*, \delta_*)$.*

Dimostrazione. Sia $x \in H_n(A_*, \partial)$. Allora $x = [a]$ per un certo $a \in A_n$ tale che $\partial a = 0$. E per definizione si ha $f_*(x) = [f_n(a)]$, $g_*(x) = [g_n(a)]$. Ma $g_n(a) - f_n(a) = \delta h_{n+1}(a) + h_{n-1}\partial a = \delta_{n+1} h_n(a)$. Quindi $g_n(a)$ e $f_n(a)$ differiscono per un bordo. Pertanto $[g_n(a)] = [f_n(a)]$. $\square$

Teorema 2 (di Invarianza omotopica)**.** *Siano $f, g, : X \to Y$ due applicazioni omotope. Allora $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.*

Per dimostrare il Teorema 2 è sufficiente dimostrare il seguente risultato.

Teorema 3. *Per $k = 0, 1$ sia $i_k : X \hookrightarrow X \times [0, 1]$ la mappa $i_k(x) := (x, k)$. Allora esiste un operatore*

$$h_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$$

tale che $\partial h + h \partial = i_{1\#} - i_{0\#}$.

Vediamo perché il Teorema 3 implica il Teorema 2. Se h_* è un operatore di omotopia come nell'enunciato del Teorema 3, allora ponendo $k_n := H_\# \circ h_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ si ottiene un operatore di omotopia fra i morfismi $f_\#$, $g_\# : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$. Per il Lemma 1 si deduce che vale il Teorema 2.

Per dimostrare il Teorema 3 facciamo la seguente costruzione. Poniamo

$$v_i = (e_i, 0), w_i = (e_i, 1),$$
$$\tau_n^j := [v_0, \ldots, v_j, w_j, \ldots, w_n] : \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n \times I,$$
$$P_n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \tau_n^j.$$

osserviamo che τ_n^j è un simplesso singolare affine di dimensione $n+1$ in $\Delta_n \times I$, quindi $P_n \in C_{n+1}(\Delta_n \times I)$.

Ora definiamo l'applicazione $h_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$. Dato un n-simplesso singolare σ in X poniamo

$$\widetilde{\sigma} := \sigma \times \mathrm{id}_I : \Delta_n \times I \longrightarrow X \times I,$$
$$h_n(\sigma) := \widetilde{\sigma}_{\#}(P_n).$$

Per dimostrare il Teorema 3 dobbiamo dimostrare che

$$\partial h_n(\sigma) + h_{n-1}\partial(\sigma) = i_{1\#}(\sigma) - i_{0\#}(\sigma). \tag{1}$$

Calcoliamo:

$$h_{n-1}\partial(\sigma) = h_{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma F_n^i\Big) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_{n-1}(\sigma F_n^i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\widetilde{\sigma F}^i_{\ n})_{\#}(P_{n-1}).$$

Si verifica immediatamente che

$$\widetilde{\sigma F^i}_n = \widetilde{\sigma}\widetilde{F}_n^i.$$

Dunque

$$h_{n-1}\partial(\sigma) = \widetilde{\sigma}_{\#}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \widetilde{F}^i_{n\#}(P_{n-1})\right). \tag{2}$$

Inoltre

$$\partial h_n(\sigma) = \partial \widetilde{\sigma}_{\#}(P_n) = \widetilde{\sigma}_{\#}(\partial P_n). \tag{3}$$

perché $\widetilde{\sigma}_{\#} : C_*(\Delta_n \times I) \to C_*(X \times I)$ è un morfismo di complessi. Infine per $k = 0, 1$ poniamo

$$\gamma_k : \Delta_n \longrightarrow \Delta_n \times I, \quad \gamma_k(x) = (x, k).$$

Allora $i_k\sigma(x) = (\sigma(x), k) = \widetilde{\sigma}\gamma_k(x)$ per ogni $x \in \Delta_n$, quindi

$$i_{k\#}(\sigma) = \widetilde{\sigma}\#(\gamma_k). \tag{4}$$

Sostituendo le (3), (2) ed (4) nella (1) troviamo che essa è equivalente alla formula

$$\widetilde{\sigma}_\#\left(\partial P_n + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \widetilde{F}^i_{n\#}(P_{n-1})\right) = \widetilde{\sigma}_\#(\gamma_1 - \gamma_0).$$

Quindi per dimostrare la (1) è sufficiente dimostrare che

$$\partial P_n + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \widetilde{F}^i_{n\#}(P_{n-1}) = \gamma_1 - \gamma_0. \tag{5}$$

In questo modo ci siamo ricondotti ad un problema completamente esplicito sul prisma $\Delta_n \times I$. Prima di risolvere questo problema facciamo alcune osservazioni. P_n è una $(n+1)$-catena nel prisma $\Delta_n \times I$. Questa catena è una somma con segni alterni degli $(n+1)$-simplessi lineari τ^j_n. L'unione delle immagini dei τ^j_n coincide con tutto il prisma $\Delta_n \times I$. In sostanza P_n è un modo di vedere il prisma come una $(n+1)$-catena. Il bordo geometrico del prisma è formato dalla base, che è parametrizzata da γ_0, dal coperchio, parametrizzato da γ_1, e dall'unione delle facce laterali. Questa unione è proprio rappresentata dalla n-catena $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \widetilde{F}^i_{n\#}(P_{n-1})$. I segni sono presenti (come nella definizione di P_n) per compensare le orientazioni naturali dei simplessi che non sono compatibili. Dunque in sostanza la formula (5) dice che il bordo del prisma consiste di base, coperchio e facce laterali.

Passiamo ora alla dimostrazione della formula (5). Cominciamo con alcune osservazioni.

Lemma 4. *Sia $\sigma = [x_0, \ldots, x_n] : \Delta_n \to \mathbb{R}^k$ un n-simplesso lineare e sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ una applicazione lineare. Allora $f \circ \sigma = [f(x_0), \ldots, f(x_n)]$.*

Lemma 5. *Sia $F^i_n = [e_0, \ldots, \widehat{e}_i, \ldots, e_n] : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$. Allora*

$$F^i_n(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 0 \le k < i, \\ e_{k+1} & \text{se } i \le k \le n-1. \end{cases}$$

Se $\tau = [v_0, \ldots, v_n]$ è un n-simplesso affine in $\mathbb{R}^m$,

$$\tau \circ F^i_n = [v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_n].$$

Lemma 6. *a) Se $0 \le i \le j \le n-1$,*

$$\widetilde{F}^i_n \tau^j_{n-1} = [v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_{j+1}, w_{j+1}, \ldots, w_n] = \tau^{j+1}_n F^i_{n+1}.$$

b) Se invece $0 \le j < i \le n$,

$$\widetilde{F}^i_n \tau^j_{n-1} = [v_0, \ldots, v_j, w_j, \ldots, \widehat{w}_i, \ldots, w_n] = \tau^j_n F^{i+1}_{n+1}.$$

Dimostrazione. Per definizione $\widetilde{F}^i_n(v_k) = (F^i_n(e_k), 0)$ e $\widetilde{F}^i_n(w_k) = (F^i_n(e_k), 1)$. Pertanto dal lemma 5 segue che

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}^i_n(v_k) = v_k \quad && \widetilde{F}^i_n(w_k) = w_k \quad && \text{se } 0 \le k < i, \\ &\widetilde{F}^i_n(v_k) = v_{k+1} \quad && \widetilde{F}^i_n(w_k) = w_{k+1} \quad && \text{se } i \le k \le n-1. \end{aligned} \tag{6}$$

Osservando che $\widetilde{F}_n^i$ è restrizione di una applicazione lineare e applicando il lemma 4 otteniamo

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = \widetilde{F}_n^i \circ [v_0, \ldots, v_j, w_j \ldots, w_{n-1}] = \\ = [\widetilde{F}_n^i(v_0), \quad \ldots, \quad \widetilde{F}_n^i(v_j), \quad \widetilde{F}_n^i(w_j), \quad \ldots, \quad \widetilde{F}_n^i(w_{n-1})].\end{aligned}$$

Se $0 \leq i \leq j \leq n-1$, concludiamo che

$$\widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = [v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_{j+1}, w_{j+1}, \ldots, w_n], \tag{7}$$

mentre se $0 \leq j < i \leq n$,

$$\widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = [v_0, \ldots, v_j, w_j, \ldots, \widehat{w}_i, \ldots, w_n]. \tag{8}$$

D'altra parte

$$\begin{array}{rcccccc} \tau_n^j = & [v_0, & \cdots & v_j, & w_j, & \cdots & w_n] \\ & \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ & 0 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n+1 \end{array}$$

e comporre con F_{n+1}^i equivale a saltare il vertice di indice i. Dunque se $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

$$\begin{array}{rcccccccc} \tau_n^{j+1} F_{n+1}^i = & [v_0, & \ldots, & \widehat{v}_i, & \ldots, & v_{j+1}, & w_{j+1}, & \ldots, & w_n]. \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ & 0 & \cdots & i & \cdots & j+1 & j+2 & \cdots & n+1 \end{array} \tag{9}$$

Se invece $0 \leq j < i \leq n$, si ha

$$\begin{array}{rcccccccc} \tau_n^j F_{n+1}^{i+1} = & [v_0, & \ldots, & v_j, & w_j, & \ldots. & \widehat{w}_i, & \ldots, & w_n]. \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & 0 & \cdots & j & j+1 & \cdots & i+1 & \cdots & n+1 \end{array} \tag{10}$$

A questo punto per concludere la dimostrazione basta mettere insieme (7) e (9) da un lato, e (8) e (10) dall'altro. □

Dimostriamo ora la (5).

$$\partial P_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial \tau_n^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i = \sum_{(i,j) \in \Gamma} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i,$$

dove

$$\Gamma := [0, n+1] \times [0, n] \cap \mathbb{Z}^2.$$

Invece

$$\widetilde{F}_n^i P_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \widetilde{F}_n^i P_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j.$$

Poniamo

$$\Phi_1 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le i \le j \le n-1\},$$
$$\Phi_2 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le j < i \le n\}.$$

Siccome $\Phi_1 \sqcup \Phi_2 = ([0,n] \times [0,n-1]) \cap \mathbb{Z}^2$, usando il Lemma 6 otteniamo

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \widetilde{F}_n^i P_{n-1} = \sum_{(i,j)\in\Phi_1} (-1)^{i+j} \widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j + \sum_{(i,j)\in\Phi_2} (-1)^{i+j} \widetilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j =$$
$$= \sum_{(i,j)\in\Phi_1} (-1)^{i+j} \tau_n^{j+1} F_{n+1}^i + \sum_{(i,j)\in\Phi_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^{i+1} =$$
$$= -\sum_{(i,j-1)\in\Phi_1} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i - \sum_{(i-1,j)\in\Phi_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i.$$

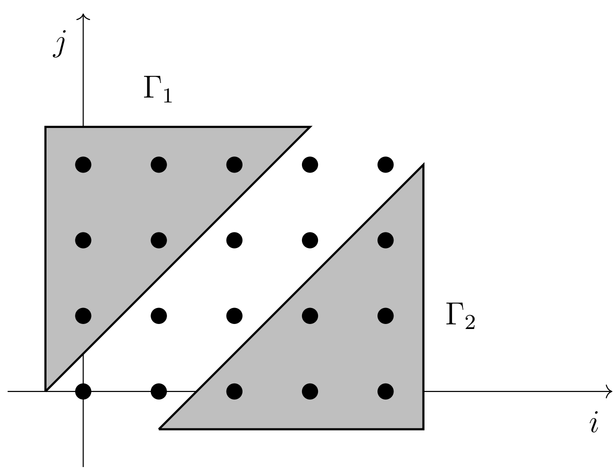
Poniamo

$$\Gamma_1 := \{(i,j) : (i,j-1) \in \Phi_1\} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le i \le j-1, j \le n\},$$
$$\Gamma_2 := \{(i,j) : (i-1,j) \in \Phi_2\} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le j < i-1, j \le n\}.$$

Dunque

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (-1)^{i+j} \widetilde{F}_n^i P_{n-1} = -\sum_{\Gamma_1\sqcup\Gamma_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i.$$

Nella figura sotto sono indicati i punti di Γ nel caso $n = 3$. Le regioni grigie indicano Γ_1 e Γ_2. Si vede che $\Gamma - \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ è l'unione delle due diagonali $j = i$ e $j = i - 1$.



Riassumendo

$$\partial P_n + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \widetilde{F}_{n\#}^i (P_{n-1}) = \sum_{\Gamma} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i - \sum_{\Gamma_1\sqcup\Gamma_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i =$$
$$= \sum_{\Gamma-\Gamma_1\sqcup\Gamma_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i = \sum_{i=0}^{n} \tau_n^i F_{n+1}^i - \sum_{i=0}^{n} \tau_n^i F_{n+1}^{i+1}.$$

Segue dal Lemma 6 che per $i = 0, \dots, n-1$ si ha

$$\tau_n^i F_{n+1}^{i+1} = [v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n] = \tau_n^{i+1} F_{n+1}^{i+1}.$$

Quindi

$$\partial P_n + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \widetilde{F}_{n\#}^i (P_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n} \tau_n^i F_{n+1}^i - \sum_{i=1}^{n+1} \tau_n^i F_{n+1}^i =$$
$$= \tau_n^0 F_{n+1}^0 - \tau_n^{n+1} F_{n+1}^{n+1}.$$

Infine

$$\tau_n^n F_{n+1}^{n+1} = [v_0, \dots, v_n, w_n][e_0, \dots, e_n] = [v_0, \dots, v_n] = \gamma_0.$$
$$\tau_n^0 F_{n+1}^0 = [v_0, w_0, \dots, w_n][e_1, \dots, e_{n+1}] = [w_0, \dots, w_n] = \gamma_1.$$

Dunque

$$\partial P_n + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \widetilde{F}_{n\#}^i (P_{n-1}) = \gamma_1 - \gamma_0.$$

È così dimostrata la (5) e quindi il teorema di invarianza omotopica.