

# Invarianza omotopica dell'omologia singolare.

Alessandro Ghigi

31 ottobre 2016

Dati due complessi di gruppi abeliani  $(A_*, \partial_*)$  e  $(D_*, \delta_*)$  consideriamo due morfismi  $f, g : A_* \rightarrow D_*$ . Una omotopia fra  $f$  e  $g$  è una collezione di morfismi  $h_n : A_n \rightarrow D_{n+1}$  tali che

$$\delta_{n+1}h_n + h_{n-1}\partial_n = g_n - f_n.$$

Se poniamo  $\varphi_i = g_i - f_i$  possiamo visualizzare quel che succede nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & \swarrow h_n & \downarrow \varphi_n & \swarrow h_{n-1} & \downarrow \varphi_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

**Lemma 1.** *Se esiste un operatore di omotopia fra  $f$  e  $g$ , allora i morfismi indotti in omologia coincidono:  $f_* = g_* : H_*(A_*, \partial_*) \rightarrow H_*(D_*, \delta_*)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in H_n(A_*, \partial)$ . Allora  $x = [a]$  per un certo  $a \in A_n$  tale che  $\partial a = 0$ . E per definizione si ha  $f_*(x) = [f_n(a)]$ ,  $g_*(x) = [g_n(a)]$ . Ma  $g_n(a) - f_n(a) = \delta h_{n+1}(a) + h_{n-1}\partial a = \delta_{n+1}h_n(a)$ . Quindi  $g_n(a)$  e  $f_n(a)$  differiscono per un bordo. Pertanto  $[g_n(a)] = [f_n(a)]$ .  $\square$

**Teorema 2** (di Invarianza omotopica). *Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  due applicazioni omotope. Allora  $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Per dimostrare il Teorema 2 è sufficiente dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 3.** *Per  $k = 0, 1$  sia  $i_k : X \hookrightarrow X \times [0, 1]$  la mappa  $i_k(x) := (x, k)$ . Allora esiste un operatore*

$$h_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$$

*tale che  $\partial h + h\partial = i_{1\#} - i_{0\#}$ .*

Vediamo perché il Teorema 3 implica il Teorema 2. Se  $h_*$  è un operatore di omotopia come nell'enunciato del Teorema 3, allora ponendo  $k_n := H_{\#} \circ h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  si ottiene un operatore di omotopia fra i morfismi  $f_{\#}, g_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ . Per il Lemma 1 si deduce che vale il Teorema 2.

Per dimostrare il Teorema 3 facciamo la seguente costruzione. Poniamo

$$\begin{aligned} v_i &= (e_i, 0), w_i = (e_i, 1), \\ \tau_n^j &:= [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] : \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n \times I, \\ P_n &:= \sum_{j=0}^n (-1)^j \tau_n^j. \end{aligned}$$

osserviamo che  $\tau_n^j$  è un simplesso singolare affine di dimensione  $n + 1$  in  $\Delta_n \times I$ , quindi  $P_n \in C_{n+1}(\Delta_n \times I)$ .

Ora definiamo l'applicazione  $h_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ . Dato un  $n$ -simplesso singolare  $\sigma$  in  $X$  poniamo

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &:= \sigma \times \text{id}_I : \Delta_n \times I \longrightarrow X \times I, \\ h_n(\sigma) &:= \tilde{\sigma}_\#(P_n). \end{aligned}$$

Per dimostrare il Teorema 3 dobbiamo dimostrare che

$$\partial h_n(\sigma) + h_{n-1} \partial(\sigma) = i_{1\#}(\sigma) - i_{0\#}(\sigma). \quad (1)$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} h_{n-1} \partial(\sigma) &= h_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma F_n^i \right) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i h_{n-1}(\sigma F_n^i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\tilde{\sigma} \widetilde{F}_n^i)_\#(P_{n-1}). \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che

$$\widetilde{\sigma F_n^i} = \tilde{\sigma} \widetilde{F}_n^i.$$

Dunque

$$h_{n-1} \partial(\sigma) = \tilde{\sigma}_\# \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \widetilde{F}_n^i(P_{n-1}) \right). \quad (2)$$

Inoltre

$$\partial h_n(\sigma) = \partial \tilde{\sigma}_\#(P_n) = \tilde{\sigma}_\#(\partial P_n). \quad (3)$$

perché  $\tilde{\sigma}_\# : C_*(\Delta_n \times I) \rightarrow C_*(X \times I)$  è un morfismo di complessi. Infine per  $k = 0, 1$  poniamo

$$\gamma_k : \Delta_n \longrightarrow \Delta_n \times I, \quad \gamma_k(x) = (x, k).$$

Allora  $i_k \sigma(x) = (\sigma(x), k) = \tilde{\sigma} \gamma_k(x)$  per ogni  $x \in \Delta_n$ , quindi

$$i_{k\#}(\sigma) = \tilde{\sigma}_\#(\gamma_k). \quad (4)$$

Sostituendo le (3), (2) ed (4) nella (1) troviamo che essa è equivalente alla formula

$$\tilde{\sigma}_{\#} \left( \partial P_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_{n\#}^i(P_{n-1}) \right) = \tilde{\sigma}_{\#}(\gamma_1 - \gamma_0).$$

Quindi per dimostrare la (1) è sufficiente dimostrare che

$$\partial P_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_{n\#}^i(P_{n-1}) = \gamma_1 - \gamma_0. \quad (5)$$

In questo modo ci siamo ricondotti ad un problema completamente esplicito sul prisma  $\Delta_n \times I$ . Prima di risolvere questo problema facciamo alcune osservazioni.  $P_n$  è una  $(n+1)$ -catena nel prisma  $\Delta_n \times I$ . Questa catena è una somma con segni alterni degli  $(n+1)$ -simplessi lineari  $\tau_n^j$ . L'unione delle immagini dei  $\tau_n^j$  coincide con tutto il prisma  $\Delta_n \times I$ . In sostanza  $P_n$  è un modo di vedere il prisma come una  $(n+1)$ -catena. Il bordo geometrico del prisma è formato dalla base, che è parametrizzata da  $\gamma_0$ , dal coperchio, parametrizzato da  $\gamma_1$ , e dall'unione delle facce laterali. Questa unione è proprio rappresentata dalla  $n$ -catena  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_{n\#}^i(P_{n-1})$ . I segni sono presenti (come nella definizione di  $P_n$ ) per compensare le orientazioni naturali dei simplessi che non sono compatibili. Dunque in sostanza la formula (5) dice che il bordo del prisma consiste di base, coperchio e facce laterali.

Passiamo ora alla dimostrazione della formula (5). Cominciamo con alcune osservazioni.

**Lemma 4.** Sia  $\sigma = [x_0, \dots, x_n] : \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^k$  un  $n$ -simpleso lineare e sia  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  una applicazione lineare. Allora  $f \circ \sigma = [f(x_0), \dots, f(x_n)]$ .

**Lemma 5.** Sia  $F_n^i = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ . Allora

$$F_n^i(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 0 \leq k < i, \\ e_{k+1} & \text{se } i \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Se  $\tau = [v_0, \dots, v_n]$  è un  $n$ -simpleso affine in  $\mathbb{R}^m$ ,

$$\tau \circ F_n^i = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

**Lemma 6.** a) Se  $0 \leq i \leq j \leq n-1$ ,

$$\tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, w_n] = \tau_n^{j+1} F_{n+1}^i.$$

b) Se invece  $0 \leq j < i \leq n$ ,

$$\tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] = \tau_n^j F_{n+1}^{i+1}.$$

*Dimostrazione.* Per definizione  $\tilde{F}_n^i(v_k) = (F_n^i(e_k), 0)$  e  $\tilde{F}_n^i(w_k) = (F_n^i(e_k), 1)$ . Pertanto dal lemma 5 segue che

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n^i(v_k) &= v_k & \tilde{F}_n^i(w_k) &= w_k & \text{se } 0 \leq k < i, \\ \tilde{F}_n^i(v_k) &= v_{k+1} & \tilde{F}_n^i(w_k) &= w_{k+1} & \text{se } i \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Osservando che  $\tilde{F}_n^i$  è restrizione di una applicazione lineare e applicando il lemma 4 otteniamo

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j &= \tilde{F}_n^i \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_{n-1}] = \\ &= [\tilde{F}_n^i(v_0), \dots, \tilde{F}_n^i(v_j), \tilde{F}_n^i(w_j), \dots, \tilde{F}_n^i(w_{n-1})].\end{aligned}$$

Se  $0 \leq i \leq j \leq n-1$ , concludiamo che

$$\tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, w_n], \quad (7)$$

mentre se  $0 \leq j < i \leq n$ ,

$$\tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j = [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n]. \quad (8)$$

D'altra parte

$$\tau_n^j = \begin{array}{cccccc} v_0, & \cdots & v_j, & w_j, & \cdots & w_n \\ \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ 0 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n+1 \end{array}$$

e comporre con  $F_{n+1}^i$  equivale a saltare il vertice di indice  $i$ . Dunque se  $0 \leq i \leq j \leq n-1$ ,

$$\tau_n^{j+1} F_{n+1}^i = \begin{array}{cccccccc} v_0, & \cdots, & \hat{v}_i, & \cdots, & v_{j+1}, & w_{j+1}, & \cdots, & w_n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \cdots & i & \cdots & j+1 & j+2 & \cdots & n+1 \end{array} \quad (9)$$

Se invece  $0 \leq j < i \leq n$ , si ha

$$\tau_n^j F_{n+1}^{i+1} = \begin{array}{cccccccc} v_0, & \cdots, & v_j, & w_j, & \cdots & \hat{w}_i, & \cdots, & w_n \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \cdots & j & j+1 & \cdots & i+1 & \cdots & n+1 \end{array} \quad (10)$$

A questo punto per concludere la dimostrazione basta mettere insieme (7) e (9) da un lato, e (8) e (10) dall'altro.  $\square$

Dimostriamo ora la (5).

$$\partial P_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial \tau_n^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i = \sum_{(i,j) \in \Gamma} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i,$$

dove

$$\Gamma := [0, n+1] \times [0, n] \cap \mathbb{Z}^2.$$

Invece

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n^i P_{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j, \\ \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_n^i P_{n-1} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \tilde{F}_n^i \tau_{n-1}^j.\end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned}\Phi_1 &:= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i \leq j \leq n-1\}, \\ \Phi_2 &:= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq j < i \leq n\}.\end{aligned}$$

Siccome  $\Phi_1 \sqcup \Phi_2 = ([0, n] \times [0, n-1]) \cap \mathbb{Z}^2$ , usando il Lemma 6 otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_n^i P_{n-1} &= \sum_{(i,j) \in \Phi_1} (-1)^{i+j} \tilde{F}_n^i \tau_n^j + \sum_{(i,j) \in \Phi_2} (-1)^{i+j} \tilde{F}_n^i \tau_n^j = \\ &= \sum_{(i,j) \in \Phi_1} (-1)^{i+j+1} \tau_n^{j+1} F_{n+1}^i + \sum_{(i,j) \in \Phi_2} (-1)^{i+j+1} \tau_n^j F_{n+1}^{i+1} = \\ &= - \sum_{(i,j-1) \in \Phi_1} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i - \sum_{(i-1,j) \in \Phi_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i.\end{aligned}$$

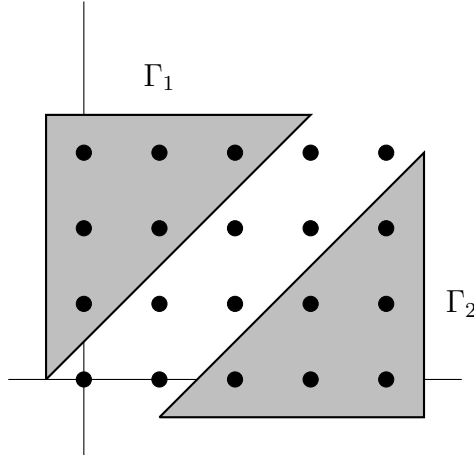
Poniamo

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &:= \{(i, j) : (i, j-1) \in \Phi_1\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i \leq j-1, j \leq n\}, \\ \Gamma_2 &:= \{(i, j) : (i-1, j) \in \Phi_2\} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq j < i-1, j \leq n\}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (-1)^{i+j} \tilde{F}_n^i P_{n-1} = - \sum_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i.$$

Nella figura sotto sono indicati i punti di  $\Gamma$  nel caso  $n = 3$ . Le regioni grigie indicano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Si vede che  $\Gamma - \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$  è l'unione delle due diagonali  $j = i$  e  $j = i - 1$ .



Riassumendo

$$\begin{aligned}\partial P_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_{n\#}^i (P_{n-1}) &= \sum_{\Gamma} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i - \sum_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i = \\ &= \sum_{\Gamma - \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} (-1)^{i+j} \tau_n^j F_{n+1}^i = \sum_{i=0}^n \tau_n^i F_{n+1}^i - \sum_{i=0}^n \tau_n^i F_{n+1}^{i+1}.\end{aligned}$$

Segue dal Lemma 6 che per  $i = 0, \dots, n - 1$  si ha

$$\tau_n^i F_{n+1}^{i+1} = [v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n] = \tau_n^{i+1} F_{n+1}^{i+1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \partial P_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_{n\#}^i(P_{n-1}) &= \sum_{i=0}^n \tau_n^i F_{n+1}^i - \sum_{i=1}^{n+1} \tau_n^i F_{n+1}^i = \\ &= \tau_n^0 F_{n+1}^0 - \tau_n^0 F_{n+1}^0. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} \tau_n^n F_{n+1}^{n+1} &= [v_0, \dots, v_n, w_n][e_0, \dots, e_n] = [v_0, \dots, v_n] = \gamma_0. \\ \tau_n^0 F_{n+1}^0 &= [v_0, w_0, \dots, w_n][e_1, \dots, e_{n+1}] = [w_0, \dots, w_n] = \gamma_1. \end{aligned}$$

Dunque

$$\partial P_n + \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{F}_{n\#}^i(P_{n-1}) = \gamma_1 - \gamma_0.$$

È così dimostrata la (5) e quindi il teorema di invarianza omotopica.