

GRASSMANNIANE

Sia $F(k, n) = \{ A \in M_{k \times n}(K) : \text{rang } A = k \}$

$F(k, n)$ è un aperto di $M_{k \times n}(K)$

Sia $G(k, n) := \{ W : W \text{ è un sottospazio} \\ \text{vettoriale di } K^n \\ \dim W = k \}$

$$\pi : F(k, n) \longrightarrow G(k, n)$$

$$\pi(A) := \text{span}(A^1, \dots, A^k)$$

dove A^i sono le colonne di A

π è suriettiva.

Metto su $G(k, n)$ la topologia quoziente
in modo che π sia una isofibrazione

$GL(k, K)$ agisce a destra su $F(k, n)$
per moltiplicazione righe $\times$ colonne:

$$\text{se } A \in F(k, n) \quad \text{e } B \in GL(k, K)$$

$$AB \in F(k, n) \quad \text{Inoltre } \pi \text{ è}$$

invariante per questa azione:

$$\text{se } \tilde{A} = AB \quad \tilde{A}^j = \sum_{i=1}^k b_{ij} A^i$$

Infatti

$$\tilde{A}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{hj} &= \sum_{i=1}^k a_{hi} b_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^k b_{ij} a_{hi} \end{aligned}$$

cioè appunto

$$\tilde{A}^j = \sum_{i=1}^k b_{ij} A^i$$

Quindi $\tilde{A}^1 \dots \tilde{A}^k$ è una nuova base
di $\pi(A) \Rightarrow \tilde{A} \in F(k, n)$
e $\pi(\tilde{A}) = \pi(A)$

Viceversa, se $\pi(A) = \pi(\tilde{A})$
allora $\{A^1 \dots A^k\}$ e $\{\tilde{A}^1 \dots \tilde{A}^k\}$ sono

due basi dello spazio $\pi(A)$
 $\Rightarrow \exists B \in GL(k, K)$ t.c. $\tilde{A}^j = \sum_{i=1}^k b_{ij} A^i$

$\Rightarrow \tilde{A} = AB$. Morale $\pi(A) = \pi(\tilde{A})$

$\Leftrightarrow \tilde{A} = AB$ con $B \in GL(k, K)$.

Dunque $G(k, n) \cong F(k, n) / GL(k, K)$

e $\pi: F(k, n) \rightarrow G(k, n)$ è identificazione
aperta.

$$R = \{(A, \tilde{A}) \in F(k, n) \times F(k, n) : \pi(A) = \pi(\tilde{A})\} \quad (3)$$

$$= \{(A, \tilde{A}) \in F(k, n) \times F(k, n) : \\ \dim \text{Span}(A^1 \dots A^k \tilde{A}^1 \dots \tilde{A}^k) = k\}$$

Sia $E = \{C \in M_{n \times 2k}(K) : \text{range } C \leq k\}$

Sappiamo che E è chiuso

$R = F(k, n) \times F(k, n) \cap E$ è chiuso
in $F(k, n) \times F(k, n)$

$\rightarrow G(k, n)$ è di Hausdorff.

Inoltre $G(k, n)$ ha base numerabile

Carte

Un k -indice è una k -pla di interi

$$I = (i_1 \dots i_k) \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Per ogni I definisco una carta di $G(k, n)$.

Data A $n \times k$ sia $M_I(A)$ la
matrice $M_I(A) := \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ A_{i_2} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix} \in M_{k \times k}(K).$

$$\tilde{U}_I := \{ A \in M_{n \times k}(K) : \det M_I(A) \neq 0 \} \quad (4)$$

$$\tilde{U}_I \text{ è aperto, } \tilde{U}_I \subseteq F(K, n)$$

$$F(K, n) = \bigcup_I \tilde{U}_I.$$

$$\text{Se } B \in GL(k, K)$$

$$M_I(AB) = M_I(A) \cdot B$$

$$\text{Infatti } AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

$$\text{cioè } (AB)_i = A_i B$$

$$\text{Verifichiamo } (AB)_i = ((AB)_{i1} \dots (AB)_{ik})$$

$$(AB)_{ij} = a_{ip} b_{pj}$$

$$\text{Quindi } M_I(AB) = \begin{pmatrix} (AB)_{i1} \\ \vdots \\ (AB)_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{i1} B \\ \vdots \\ A_{ik} B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{ik} \end{pmatrix} B = M_I(A) \cdot B.$$

Pertanto $\tilde{U}_I$ è invariante per l'azione di $GL(k, k)$.

Inoltre $\pi(\tilde{U}_I) =: U_I$ è aperto

$$\text{e } \bigcup_I U_I = G(k, n).$$

Ora definiamo le carte $\varphi_I: U_I \rightarrow K^{k(n-k)}$

se $w \in U_I$ scelgo $A \in \pi^{-1}(w)$.

$$A \in \tilde{U}_I \Rightarrow M_I(A) \in GL(k).$$

La matrice $A \cdot M_I(A)^{-1}$ non

dipende dalla scelta di A nella

fibra $\pi^{-1}(w)$. Infatti

$$\text{se } A' \in \pi^{-1}(w) \quad \pi(A) = \pi(A')$$

$$\Rightarrow \exists B \in GL(k): \quad A' = AB$$

$$M_I(A') = M_I(A) \cdot B$$

$$A' \cdot M_I(A')^{-1} = AB \cdot B^{-1} M_I(A)^{-1} = A \cdot M_I(A)^{-1}$$

Qui non dipende solo da w .

Esempio

(6)

$$k=2$$

$$n=5$$

$$I = (1, 2)$$

$$\tilde{O}_I = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{pmatrix} \in M_{5 \times 2} : \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} : \det A_1 \neq 0 \right\}$$

$$M_I(A) = A_1$$

$$A \cdot M_I(A)^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} A_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 \\ A_2 A_1^{-1} \end{pmatrix}$$

Morale la parte sopra è fissa

$$\text{e } A_2 A_1^{-1} \in M_{3 \times 2} \cong K^{3 \cdot 2}$$

$$\varphi_I \text{ associa a } W \quad A_2 A_1^{-1} \in K^{3 \cdot 2}$$

Lo stesso lavoro lo possiamo fare in generale: dato I

$$\text{sia } \gamma_I : M_{n \times k} \rightarrow M_{(n-k) \times k}$$

la funzione che getta via le righe $i_1 - i_k$:

$$\gamma_I \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_k} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Def $\tilde{\varphi}_I: \tilde{U}_I \longrightarrow M_{(n-k) \times k}$ (7)

$$\tilde{\varphi}_I(A) := \gamma_I \left(A \cdot M_I(A)^{-1} \right)$$

$\tilde{\varphi}_I(A)$ dipende solo da $\pi(A)$. dunque
c'è la fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_I & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_I} & M_{(n-k) \times k} \\ \pi \downarrow & & \\ U_I & \xrightarrow{\varphi_I} & \end{array}$$

$\tilde{\varphi}_I$ è continua (anzi C^∞) $\Rightarrow \varphi_I$ è continua

• φ_I è iniettiva

$$\varphi_I(\pi(A)) = \varphi_I(\pi(A'))$$

$$\gamma_I \left(A \cdot M_I(A)^{-1} \right) = \gamma_I \left(A' \cdot M_I(A')^{-1} \right)$$

quindi le colonne i -esima delle due
matrici $A \cdot M_I(A)^{-1}$ e $A' \cdot M_I(A')^{-1}$
coincidono se $i \notin I$.

Ma $i_1 = i_k$ sono $e_1 = e_k$

$$\Rightarrow A \cdot M_I(A)^{-1} = A' \cdot M_I(A')^{-1} \quad (8)$$

$$\Rightarrow A' = A \cdot B$$

$$B = M_I(A)^{-1} M_I(A')$$

$$\Rightarrow \pi(A') = \pi(A)$$

φ_I è suriettiva:

se $B \in M_{(n-k) \times k}$

pongo $A := \begin{pmatrix} B_1 \\ B_{i_1-1} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_k \\ B_{i_k+1-k} \\ B_{n-k} \end{pmatrix} = \varphi_I(A)$

p.e. se $k=2$ $I=(13)$ $n=5$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} e_1 \\ B_1 \\ e_2 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_I(A) = I_2$$

$$A \in \tilde{U}_I \quad \varphi_I(\pi(A)) = B$$

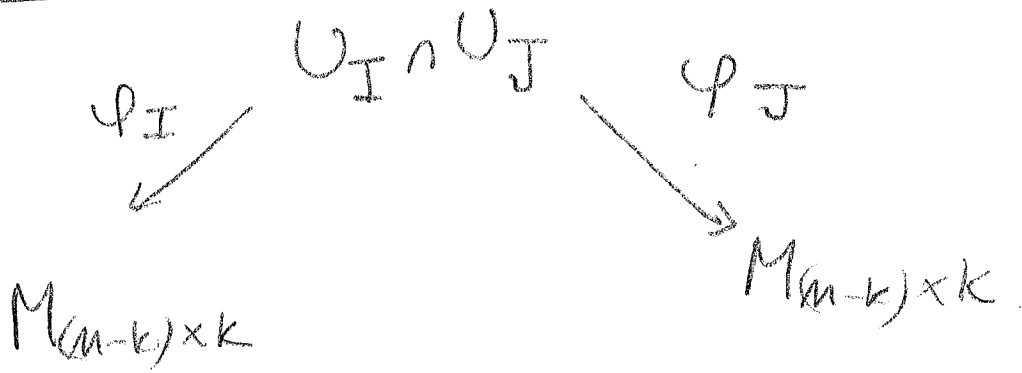
$$\Rightarrow \varphi_I \text{ è biiunivoca}$$

e $\varphi_I^{-1} = \pi \circ \varphi_I$ è continua

$$\Rightarrow \varphi_I \text{ è omeo, cioè carta}$$

Cambiamento di carte

(9)



$$\varphi_J(U_I \cap U_J) = \{ B \in M_{(n-k) \times k} :$$

$$\det M_I(\varphi_J(B)) \neq 0 \} \quad \text{e' aperto}$$

$$\varphi_I \varphi_J^{-1}(B) = \varphi_I(\pi \varphi_J(B)) =$$

$$= \tilde{\varphi}_I(\varphi_J(B)) =$$

$$= \gamma_I \left(\varphi_J(B) \cdot M_I(\varphi_J(B))^{-1} \right)$$

$$\varphi_J \text{ e' affine} \Rightarrow C^\infty$$

$$B \mapsto M_I(\varphi_J(B)) \in C^\infty$$

se e' invertibile

$$\Rightarrow B \mapsto \varphi_J(B) M_I(\varphi_J(B))^{-1}$$

e' C^∞

γ_I affine

$$\Rightarrow e' C^\infty$$

$$\Rightarrow \text{diffeo}$$

$$\Rightarrow G(k, n) \text{ e' varietà differenziabile}$$

La grassmanniana è uno spazio
omogeneo.

(10)

$$GL(n, K) \curvearrowright G(K, n)$$

$$M \in GL(n, K)$$

$$W \in G(K, n)$$

$$M \cdot W := M(W)$$

$$M: K^n \longrightarrow K^n$$

Questa è un'azione transitive

$$\Rightarrow G(K, n) \cong GL(n, K) / P$$

dove P = stabilizzatore di un punto

$$\text{p.e. } P_W = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \text{Span}(e_1 - e_k).$$

Vediamo che questa azione è liscia.

$$GL(n, K) \times G(K, n) \longrightarrow G(K, n)$$

$$(M, A) \longmapsto MA$$

è continua e scende
al quoziente

$$\begin{array}{ccc} GL(n, K) \times F(K, n) & \longrightarrow & F(K, n) \\ \text{id}_{GL} \times \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \pi \\ GL(n, K) \times G(K, n) & \longrightarrow & G(K, n) \end{array}$$

Siccome $\text{id}_{GL} \times \pi$ e' isomorfismo aperto
l'azione in basso e' continua.

Verifico che e' C^∞ .

Sia $(M_0, W_0) \in GL(n, K) \times U_I$

e supponiamo $M_0(W_0) \in U_J$.

Dunque vicino a (M_0, W_0) e' definita
l'applicazione

$$GL(n, K) \times M_{(n-k) \times k} \longrightarrow M_{(n-k) \times k}$$

$$(M, B) \longrightarrow (M, \varphi_I^{-1}(B)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow M \cdot \varphi_I^{-1}(B) \longrightarrow \varphi_J(M \cdot \varphi_I^{-1}(B))$$

ed e' continua. Basta vedere che
e' C^∞ .

$$\varphi_I^{-1}(B) = \pi \Psi_I(B)$$

(19)

$$\begin{aligned} \varphi_J(M \cdot \varphi_I^{-1}(B)) &= \tilde{\varphi}_J(M \cdot \varphi_I(B)) = \\ &= M \cdot \Psi_I(B) \cdot M_I(M \varphi_I(B))^{-1} \end{aligned}$$

Se M è vicino a M_0 e $\varphi_I^{-1}(B)$ è vicino a W_0 , allora

$M_I(M \varphi_I(B))$ è non singolare ed è C^∞ in $B \in M$

$$\Rightarrow \varphi_J(M \varphi_I^{-1}(B))$$

è C^∞ in (M, B)

$\Rightarrow$ azione libera!

$G(k, n)$ è cony. a $\mathbb{Q}$

12B

Yuzefetti $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ agisce
transitivamente su $G(k, n)$.

GRUPPO FONDAMENTALE DELLA GRASSMANNIA COMPLESSA

(18)

Sappiamo che $G_{\mathbb{C}}(k, n) =: \mathbb{G}$
 e' unione degli agenti U_I
 con I che varia nei k -indici crescenti.

~~Allora~~ ~~sta~~ Supponiamo che i k -indici
 crescenti siano $I_1, I_2, \dots, I_s$.

(In realta' $s = \binom{n}{k}$.)

Dimostriamo per involuzione che $\forall p = 1 \dots s$

~~$$X_p = \bigcup_{I_1} \dots \bigcup_{I_p}$$~~

$$X_p := U_{I_1} \cup \dots \cup U_{I_p}$$

e' semplicemente connesso.

~~Lemma~~ ~~$\forall I, J$ k -indici~~ ~~$U_I \cap U_J$ e'~~

~~non vuoto e connesso per archi.~~

~~dim~~ ~~Si~~ ~~considera~~ ~~$U_I \cap U_J$~~ ~~e' un agente~~

~~di $\mathbb{C}^{k(n-k)}$~~

~~e' sufficiente provare che~~

~~e' non vuoto e connesso.~~

~~Sfruttando la carta φ_I ho~~

~~$$\varphi_I : U_I \rightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)} =: \mathbb{C}^m$$~~

Lemma $\forall I$ U_I è un aperto
denso di G . (19)

dim Sia $A \subset G$ aperto e non vuoto.

Sia J t.c. $A \cap U_J \neq \emptyset$.

Sappiamo che $\varphi_J(U_I \cap U_J)$ è denso
in $\mathbb{C}^{k(n-k)} \Rightarrow U_I \cap U_J$ è denso in U_J
 $\Rightarrow U_I \cap U_J \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U_I \cap A \neq \emptyset$.

Lemma $\forall I, J$ $U_I \cap U_J$ è connesso.

dim

$\varphi_I(U_I \cap U_J) = \{B \in \mathbb{C}^{k(n-k)} : \det M_I(\psi_J(B)) \neq 0\}$

Sappiamo che questo insieme è non vuoto.

Siano $B_1, B_2 \in \varphi_I(U_I \cap U_J)$

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(t) = \det M_I(\psi_J(B_1 + t(B_2 - B_1)))$

è polinomiale $\Rightarrow$ ha solo un numero
finito di zeri $\Rightarrow$ esiste un cammino in

$\mathbb{C}$ $\alpha \in \Omega(\mathbb{C}, 0, 1)$ t.c. $\forall \alpha(t) \neq 0$ $\forall t$

$\Rightarrow t \mapsto B_1 + t(B_2 - B_1)$ è un cammino
in $\varphi_I(U_I \cap U_J)$ da B_1 a B_2 .

→ $U_I \cap U_J$ è come se la cerchi. (19B)

Quello che abbiamo visto è un fatto molto generale.

Lemma $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ polinomio $p \neq 0$

Allora $U := \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) \neq 0\}$ è
connesso.

Teorema $\pi_1(\mathbb{C}) = \{1\}$

dim Per ogni $p = 1, \dots, s$

$$U_I \cap \dots \cap U_{I_p} =: Y_p \neq \emptyset$$

Per $p=1$ è ovvio. Suppongo che

$$Y_{p-1} \neq \emptyset. \text{ Allora } Y_{p-1}$$

è un aperto non vuoto di $\mathbb{C}^n$.

Dal momento U_{I_p} è denso

$$\Rightarrow Y_p = Y_{p-1} \cap U_{I_p} \neq \emptyset.$$

Quindi per induzione ottengo

che esiste $x \in Y_S = \bigcap_{|I|=k} \bigcup I$

(20)

Sostengo che (X_p, x) è semplicemente connesso. Siccome X_p è una varietà diff è sufficiente porre che X_p è connesso e $\pi_1(X_p, x) = \{1\}$.

Per $p=1$ $X_1 = \bigcup I_1 \cong \mathbb{C}^{k(n-k)}$ quindi è ovvio.

Suppongo che X_{p-1} sia semplicemente connesso.

$$X_p = X_{p-1} \cup \bigcup I_p$$

X_{p-1} e $\bigcup I_p$ sono semplicemente connessi

$$X_{p-1} \cap \bigcup I_p = \bigcup_{j=1}^{p-1} (\bigcup I_j \cap \bigcup I_p)$$

Sappiamo che $\bigcup I_j \cap \bigcup I_p$ è connesso

inoltre $x \in \bigcup I_j \cap \bigcup I_p \quad \forall j$

$\Rightarrow X_{p-1} \cap \bigcup I_p$ è connesso.

Inoltre $x \in X_{p-1} \cap \bigcup I_p$

(21)

$\Rightarrow X_p$ è connesso (per archi)

e $X_{p-1} \cap \bigcup I_p$ è connesso

Serfent

$\Rightarrow \pi_1(X_p, x) = \{+1\}$

$\Rightarrow X_p$ è semplicemente connesso.

Per $p=s$ trovo che Γ è
semplicemente connesso.