

Lemma $M = \text{varietà differenziabile}$

$K \subseteq M$ compatto $x, y \in M - K$.

Se x ed y stanno nella stessa componente connessa di $M - K$, allora $\exists f \in \text{Diff}(M)$

ta $f(x) = y \quad f|_K = \text{id}_M$.

Si può anche supporre che $f = \text{id}$ fuori da un compatto.

dim $\exists \alpha \in \Omega(M - K, x, y)$

Riscriviamo $\alpha([0, 1])$ con un numero finito di archi U_i sui quali sono definite delle carte $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che $\varphi_i(U_i) = B(0, 1)$. Dunque

$$\alpha([0, 1]) \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$$

Posso supporre che esista una partizione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$

ta $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$.

Per tutto questo uso il lemma di Lebesgue.

Sia $p_i = \alpha(t_i)$ | **INOLTRE** posto $\bigcup_{\text{supp}} U_i \cap K = \emptyset \quad \forall i$

f sufficiente per cui $\forall i=1 \dots m$ (2)

$\exists f_i \in \text{Diff}(M)$ t.c. $f_i(P_{i-1}) = P_i$

$f_i|_K \equiv \text{id}$ • $f_i = \text{id}$ fuori di
un compatto $Q_i \subset M$.

Infatti posto $f = f_m \circ \dots \circ f_1$ avremo

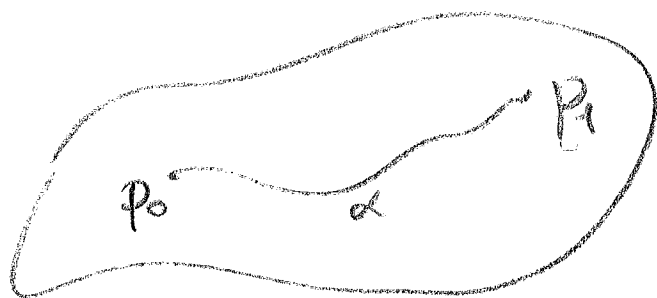
$f(P_0) = P_m$ $f|_K \equiv \text{id}$.

e $f = \text{id}$ fuori di

$$\underline{Q_i = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m.}$$

Quindi posso supporre $X = p_0$ $y = p_1$

$$U = U_1$$



$$\alpha([0,1]) \subset U$$

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(U) = B(o,1)$$

$$x_0 = \varphi(p_0)$$

$$x_1 = \varphi(p_1)$$

$$v := x_1 - x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sia } \chi \in C_0^\infty(U)$$

$$\chi \equiv 1 \text{ vicino}$$

$$\text{a } \varphi^{-1}(o)$$

ovvero

$$\sigma = \overline{x_0 x_1} = \{ (1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0,1] \} \quad (3)$$

Sia $X \in \mathcal{X}(M)$

$$X(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin \text{supp}(X) \\ \sum_{i=1}^n X(p) v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p & \text{se } p \in U \end{cases}$$

le due definizioni

coincidono su $U = \text{supp } X$

$M - \text{supp } X$ è aperto poiché $\text{supp } X$ è compatto $\Rightarrow$ è chiuso in M .

$\Rightarrow X \in \mathcal{X}(M)$

Sia $f_1 := \varphi_1^X$

Allora $f_1 = \text{id}$ fuori di U

$\Rightarrow$ in particolare è vero su K .

Poi consideriamo $\beta: (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \rightarrow M$

$$\beta(t) := \varphi^{-1}(x_0 + tv)$$

per ε piccolo β è definita e lascia (4)
perché $x_0 + tv \in B(0,1)$.

$$\begin{aligned}\text{Ma } \dot{\beta}(t) &= \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \big|_{\beta(t)} = \\ &= \sum_i X(\beta(t)) \cdot v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \big|_{\beta(t)} = \\ &= X(\beta(t))\end{aligned}$$

perché $X \equiv 1$ su $\sigma = \varphi^{-1}(\beta([0,1]))$.

$$\Rightarrow \beta(t) = \varphi_t^X(p_0) \quad \text{per } t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \varphi_1^X(p_0) = \beta(1) = p_1$$

Esercizio

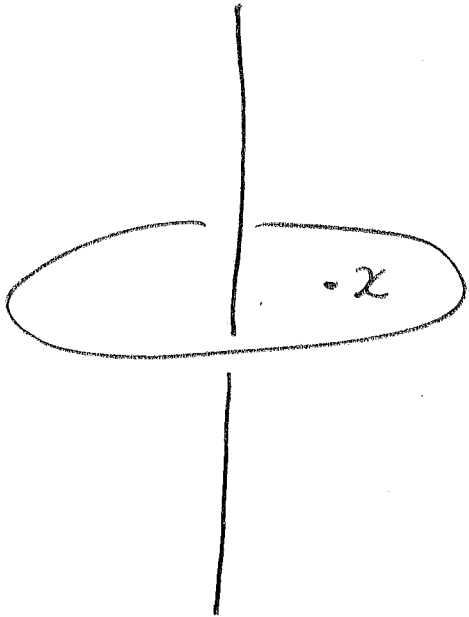
$$X_0 := S^1 \times \{0\} \cup \{x=y=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$X := \mathbb{R}^3 - X_0$$

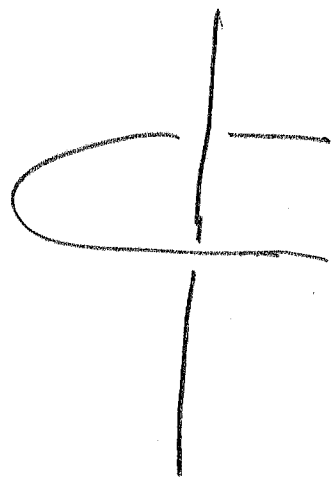
Calcolare

$$\pi_1(X, x).$$

$$x = (0, \frac{1}{2}, 0) \text{ per esempio.}$$



$U =$

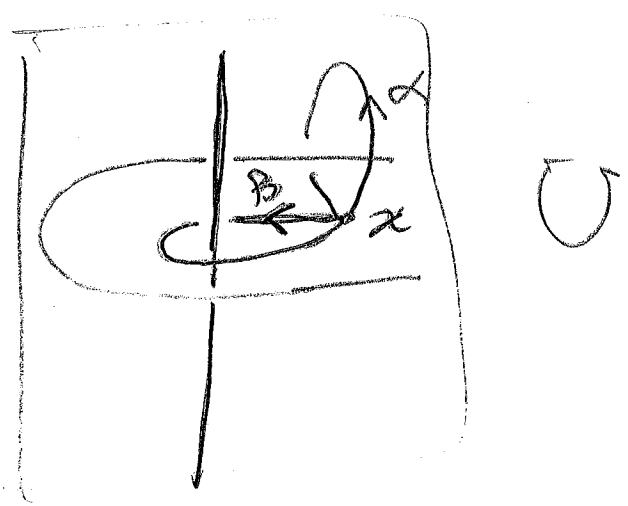


$V =$

⑥

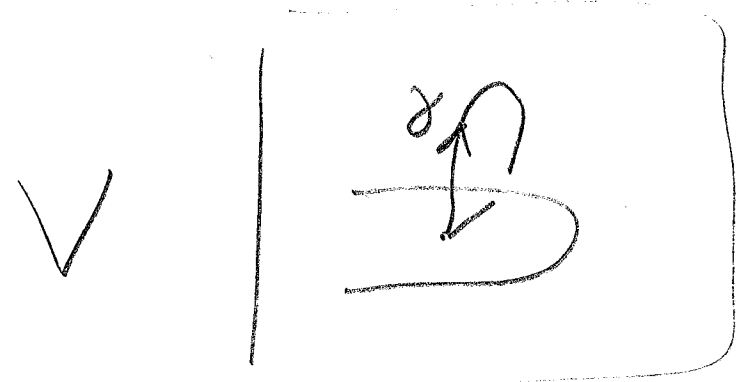
$$U \cong \text{cube with two vertical lines} \simeq \text{square with two dots} \simeq \infty$$

$$\Rightarrow \pi_1(U, x) = \mathbb{Z}[\alpha] * \mathbb{Z}[\beta]$$



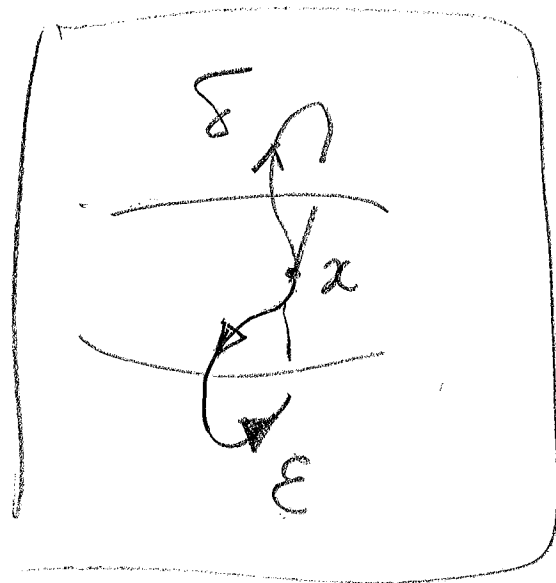
$$V \triangleq \text{cube with one vertical line} \simeq \text{square with one dot} \simeq \circ$$

$$\pi_1(V) = \mathbb{Z}[\alpha]$$



$$U \cap V = \text{cube with two horizontal lines} \simeq \text{square with two dots} \simeq \infty$$

$$\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}[\alpha] * \mathbb{Z}[\beta]$$



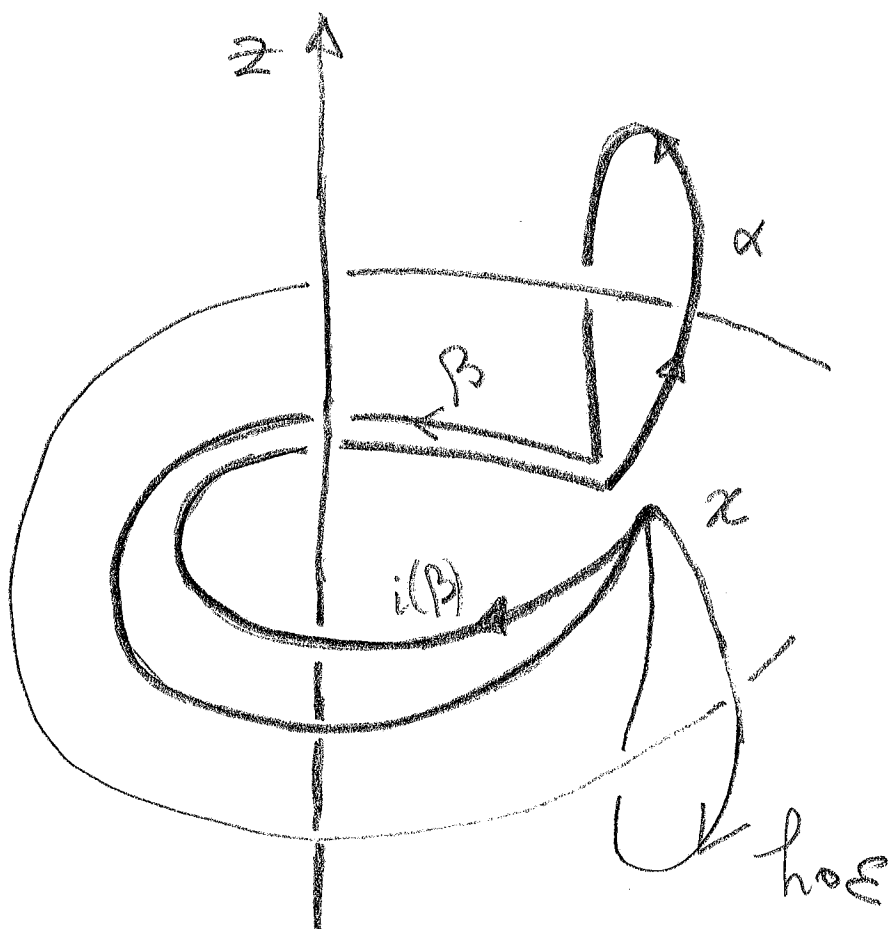
$U \cap V$.

$$h: U \cap V \hookrightarrow U$$

$$k: U \cap V \hookrightarrow V$$

$$h_*[\delta] = [\alpha]$$

$$h_*[\varepsilon] = [h \circ \varepsilon] = [\varepsilon]_U$$



U

Nel disegno e' indicato $h \circ \varepsilon$ e poi ⑧
 e' indicato un cammino molto
 vicino a $i(\beta) * \alpha * \beta$ e
 ad esso omotopo.

Facendo notare la parte corrispondente
 ad α attorno all'asse z ci
 accorgiamo che

$$i(\beta) * \alpha * \beta \sim h \circ \varepsilon$$

$$\Rightarrow h_*[\varepsilon] = [\beta]^{-1} \cdot [\alpha] \cdot [\beta]$$

Infine $k_*[\delta] = [\gamma]$

$$k_*[\varepsilon] = [\gamma]$$

N e' generato normalmente da

$$h_*[\delta] k_*[\delta]^{-1} = [\alpha] \cdot [\gamma]^{-1}$$

$$h_*[\varepsilon] k_*[\varepsilon]^{-1} = [\beta]^{-1} [\alpha] [\beta] [\gamma]^{-1}$$

$$\pi_4(U) * \pi_1(V) = \mathbb{Z}_{[a]} * \mathbb{Z}_{[b]} * \mathbb{Z}_{[c]} \quad (8B)$$

$$= \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b * \mathbb{Z}_c$$

on disoigne

proceder in modo algebrico:

$$N = \langle a c^{-1}, b^{-1} a b c^{-1} \rangle$$

$$\frac{\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b * \mathbb{Z}_c}{N} \cong \frac{\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b * \mathbb{Z}_c}{N'} \bigg/ \frac{N}{N'}$$

dove $N' = \langle a b^{-1} \rangle$ (teorema di
dewarffismo!)

$$\frac{\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b * \mathbb{Z}_c}{N'} \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b$$

$$a N' \longmapsto a$$

$$b N' \longmapsto b$$

$$c N' \longmapsto a$$

$$\varphi(N/N') = \langle b^{-1} a b a^{-1} \rangle$$

⑨

$\Rightarrow$

$$\pi_1(X) \cong \frac{\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b}{\langle\langle b^{-1} a b a^{-1} \rangle\rangle}$$

questo
significa che $ab=ba$
nel quoziente

$$\cong \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$$

voltare.

Lemma Sia C_a un gruppo
ciclico infinito con generatore a .

Allora

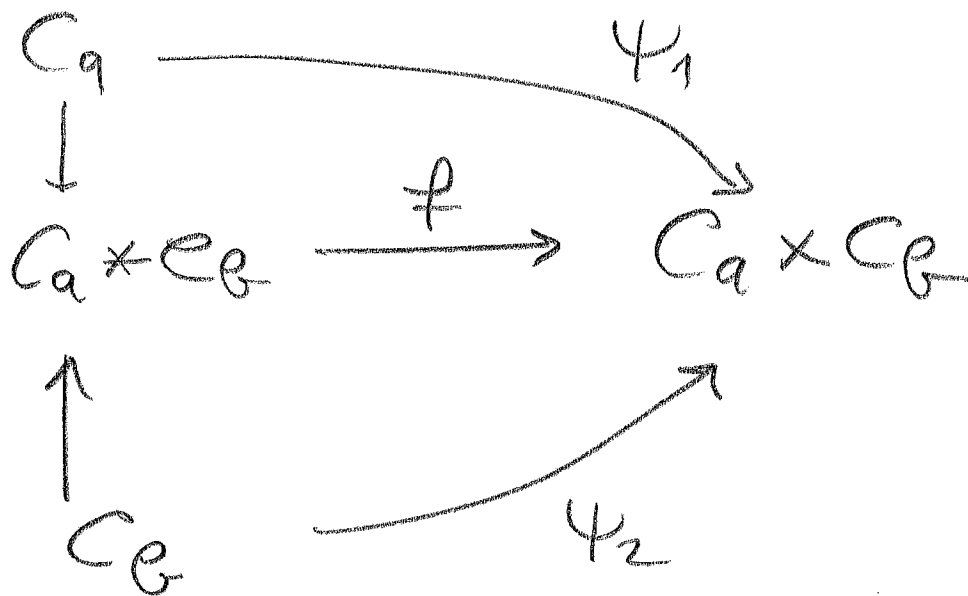
$$\frac{C_a * C_b}{\langle\langle ab\bar{a}^1b^{-1}\rangle\rangle} \cong C_a \times C_b$$

dim Sia $\psi_1: C_a \longrightarrow C_a \times C_b$

$$\psi_1(a^k) = (a^k, 1)$$

$$\psi_2: C_b \longrightarrow C_a \times C_b \quad \psi_2(b^k) = (1, b^k)$$

Per la proprietà universale esiste



f è un morfismo suriettivo.

Siccome $(a, 1)$ e $(1, b)$ commutano

$$\text{in } C_a \times C_b \implies f(ab\bar{a}^1b^{-1}) = (1, 1)$$

$$\Rightarrow N := \langle\langle a b a^{-1} b^{-1} \rangle\rangle \subseteq \text{Ker } f$$

(11)

Dimostrar f passa al quoziente:

$$C_a * C_b \xrightarrow{f} C_a * C_b$$

$\downarrow$

$$G' := C_a * C_b / N$$

$\nearrow \tilde{f}$

Resta da dimostrare che $\tilde{f}$ è iniettivo.

Sia $x \in \text{Ker } \tilde{f}$. $x = wN$

con $w \in C_a * C_b$, quindi w è una parola

$$w = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_s} b^{\beta_s}$$

In G' $a b a^{-1} b^{-1} N = N$

$\Rightarrow aN$ e bN commutano

$$\Rightarrow x = wN = a^{\sum_{i=1}^s \alpha_i} \cdot b^{\sum_{i=1}^s \beta_i} \cdot N$$

$$(1, 1) = \tilde{f}(x) = (a^{\sum_{i=1}^s \alpha_i}, b^{\sum_{i=1}^s \beta_i})$$

$$\Rightarrow a^{\sum \alpha_i} = b^{\sum \beta_i} = 1 \Rightarrow x = 1$$