

# Calendario delle lezioni di Geometria III

13 gennaio 2015

## Lezione 29/09, 10.30-12.30 aula u9-14

- $\text{Hom}(V, W)$ . Topologia e norma sugli spazi di matrici.
- Il prodotto di matrici è una funzione  $C^\infty$ .
- L'applicazione  $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  è  $C^\infty$ .
- Differenziale di una funzione da un aperto di  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ .
- Derivata direzionale. Derivate parziali.
- Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  e le derivate parziali di  $f$  esistono in un intorno di  $x_0 \in A$  e sono continue in  $x_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è di classe  $C^k$  se è differenziabile in ogni punto di  $A$  e l'applicazione  $df : A \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  è  $C^{k-1}$ . Ciò equivale a chiedere che  $f$  ammette derivate parziali  $\partial f_i / \partial x_j$  su tutto  $A$  e che esse sono funzioni  $C^{k-1}$ .
- Funzioni lisce o  $C^\infty$ .
- Derivata della funzione composta: se  $f : A \rightarrow B$  è liscia, dove  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$  sono aperti e  $g : b \rightarrow \mathbb{R}^p$  pure è liscia, allora  $g \circ f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^p)$ .
- Diffeomorfismi. Il differenziale di un diffeomorfismo è un isomorfismo di spazi vettoriali. Aperti diffeomorfi hanno la stessa dimensione.
- Sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1** (del valor medio). Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto convesso ed  $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ . Se  $x_0, x_1 \in A$  esiste  $t \in (0, 1)$  tale che

$$f(x_1) - f(x_0) = df((1-t)x_0 + tx_1)(x_1 - x_0). \quad (1)$$

*Dimostrazione.* Sia  $u(t) = f((1-t)x_0 + tx_1)$ . Si applichi il Teorema di Lagrange, ossia il Teorema valor medio in una variabile, alla funzione  $u$ .  $\square$

**Teorema 2** (della Funzione Inversa). Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^\infty$ . Se  $d\varphi(x_0)$  è un isomorfismo, allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x_0$  tale che  $V = \varphi(U)$  sia aperto e  $\varphi|_U$  sia un diffeomorfismo di  $U$  su  $V$ .

- Basi di uno spazio topologico.
- Spazi metrici separabili. Gli spazi metrici separabili ammettono basi numerabili.
- Varietà topologiche.
- Carte (o sistemi di coordinate) su una varietà topologica.
- Cambiamento di coordinate.

### Lezione 01/10, 13.30-14.30 aula u9-08

- Carte compatibili.
- Atlanti. Atlanti massimali.
- Una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale è una coppia  $(X, \mathfrak{A})$ , dove  $X$  è una varietà topologica  $n$ -dimensionale e  $\mathfrak{A}$  è un atlante differenziabile massimale.
- Ogni atlante  $\mathfrak{A}$  è contenuto in un unico atlante  $\mathfrak{A}_{\max}$  definito nel modo seguente: una carta  $(U, \varphi)$  appartiene ad  $\mathfrak{A}_{\max}$  se e solo se essa è compatibile con tutte le carte di  $\mathfrak{A}$ .

### Esercitazione 01/10, 14.30-15.30 aula u9-08

- Esempi di varietà differenziabili:  $\mathbb{R}^n$ , aperti di  $\mathbb{R}^n$ .
- Se  $(X, \mathfrak{A})$  è una varietà differenziabile e  $A \subset X$  è un aperto, allora

$$\mathfrak{A}_A := \{(U, \varphi) \in \mathfrak{A} : U \subset A\}$$

è un atlante massimale su  $A$ . (Esercizio.)

- Due atlanti distinti per  $S^1$ . Danno luogo allo stesso atlante massimale.
- Se  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  sono atlanti su  $X$ , allora  $\mathfrak{A}_{\max} = \mathfrak{B}_{\max}$  se e solo ogni carta di  $\mathfrak{A}$  è compatibile con ogni carta di  $\mathfrak{B}$ . (Esercizio.)

### Lezione 06/10, 10.30-11.30 aula u9-14

- Richiami sulle azioni di gruppi. Azioni fedeli (o effettive). Azioni libere. Stabilizzatori. Orbite. Traslati. Se  $E \subset X$  e  $\pi : X \rightarrow X/G$  è la proiezione canonica, allora

$$\pi^{-1}\pi(E) = \bigcup_{g \in G} gE.$$

- Se  $G$  agisce su uno spazio topologico  $X$  per omeomorfismi, allora  $\pi : X \rightarrow X/G$  è una identificazione aperta.
- Se  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  è una identificazione aperta, allora  $X/\sim$  è di Hausdorff se e soltanto se  $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$  è chiuso.
- Se  $p : X \rightarrow Y$  è una identificazione aperta e  $X$  è uno spazio topologico a base numerabile, allora anche  $Y$  lo è.

### Esercitazione 06/10, 11.30-12.30 aula u9-14

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sono varietà differenziabili.
- Esempio di uno spazio a base numerabile che ammette un atlante di carte compatibili, ma non è di Hausdorff.

**Lezione 08/10, 13.30-15.30 aula u9-08**

- Sia  $(M, \mathfrak{A}_{\max})$  una varietà differenziabile. Una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è *differenziabile* o *liscia* o  $C^\infty$  se per ogni carta  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}_{\max}$  si ha  $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$ .
- Una funzione liscia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è automaticamente continua.
- Sia  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\max}$  un atlante. Allora è sufficiente che  $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$  per le carte  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ .
- Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili. Una applicazione  $F : M \rightarrow N$  è *differenziabile* o *liscia* o  $C^\infty$  se è continua e se per ogni carta  $(V, \psi)$  su  $N$  e per ogni carta  $(U, \varphi)$  su  $M$  o  $U \cap F^{-1}(V) = \emptyset$  oppure

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U \cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

- Se  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  sono atlanti su  $M$  ed  $N$  rispettivamente, è sufficiente controllare che la condizione (2) sia verificata per  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$  e  $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$ .
- Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto convesso e sia  $h \in C^\infty(A)$ . Allora dato  $a \in A$  esistono  $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(A)$  tali che

1.  $h(x) = h(a) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i)g_i(x)$  per ogni  $x \in A$ ;
2.  $g_i(a) = \frac{\partial h}{\partial x^i}(a)$ .

- Germi di funzioni lisce in  $p \in M$ . Costruzione dello spazio  $C_{M,p}^\infty$ . Operazioni su di esso.  $C_{M,p}^\infty$  è un'algebra commutativa con unità sul campo  $\mathbb{R}$ . Data  $f \in C^\infty(U)$  con  $p \in U$  indichiamo con  $f_p$  il germe di  $f$  in  $p$ .
- $\mathfrak{m}_p := \{f_p \in C_{M,p}^\infty : f(p) = 0\}$  è un ideale.  $C_{M,p}^\infty = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}_p$ .
- Un vettore tangente  $v$  ad  $M$  in  $p$  è un funzionale lineare  $v : C_{M,p}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa la seguente regola di Leibniz:

$$v(f_p \cdot g_p) = v(f_p) \cdot g(p) + f(p)v(g_p).$$

- $v(1) = 0$ . Inoltre  $v(f_p \cdot g_p) = 0$ , se  $f_p, g_p \in \mathfrak{m}_p$ . Dunque  $v|_{\mathfrak{m}_p^2} \equiv 0$ .
- $T_p M \cong (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*$ .

### Lezione 10/10, 10.30-12.30 aula u9-14

- Se  $f_p \in C_{M,p}^\infty$  e  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  è una carta vicino a  $p$ , allora

$$f_p = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_p^i - a^i) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(a) + R$$

dove  $a = \varphi(p)$  e  $R \in \mathfrak{m}_p^2$ .

- Definiamo  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  mediante la formula

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f_p) := \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

- Se  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  è una carta vicino a  $p$ , allora

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x_p^i) = \delta_{ij}.$$

I vettori  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  formano una base di  $T_p M$  e per ogni  $v \in T_p M$  si ha

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_p^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

- Se  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  è un'altra carta vicino a  $p$ , allora posto  $h := \varphi \psi^{-1}$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h^i}{\partial y^j}(\psi(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

- Sia  $\mathcal{C}$  l'insieme delle applicazioni lisce  $\alpha : I_\alpha \rightarrow M$ , dove  $I_\alpha \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto e tali che  $\alpha(0) = p$ . Diciamo che  $\alpha \sim \beta$  se esiste una carta  $(U, \varphi)$  con  $p \in U$  tale che

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi \alpha(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi \beta(t).$$

- Se questo succede in una carta, allora succede in tutte le carte.

- Alla curva  $\alpha \in \mathcal{C}$  associamo il vettore tangente  $\dot{\alpha}(0) \in T_p M$  definito dalla formula

$$\dot{\alpha}(0)(f_p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) \quad f_p \in C_{M,p}^\infty.$$

- L'applicazione  $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$  discende ad una applicazione biunivoca  $\mathcal{C}/\sim \rightarrow T_p M$ .
- Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , c'è un isomorfismo canonico  $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ .
- Se  $X$  è uno spazio affine reale con spazio vettoriale associato  $\vec{X}$ , allora per ogni  $p \in X$  c'è un isomorfismo canonico  $T_p X \cong \vec{X}$ .
- Definizione del differenziale di una mappa  $C^\infty$ .

### Lezione 15/10, 13.30-15.30 aula u9-08

- Interpretazione del differenziale tramite le curve.
- Se fisso delle carte su  $M$  e su  $N$  il differenziale è rappresentato dalla matrice jacobiana della rappresentazione locale:

$$df_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{(f(p))}.$$

**Teorema 3** (della funzione inversa sulle varietà). *Siano  $M$  ed  $N$  due varietà e sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione differenziabile. Se  $p \in M$  e  $df_p$  è un isomorfismo, allora esiste un aperto  $U \subset M$  tale che  $f(U)$  è aperto e tale che  $f|_U$  è un diffeomorfismo di  $U$  su  $f(U)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(W, \varphi)$  una carta su  $M$  con  $p \in W$  e sia  $(V, \psi)$  una carta su  $N$  con  $f(p) \in V$ . Restringendo possiamo supporre  $f(W) \subset V$ . Siccome  $df_p$  è un isomorfismo, le due varietà hanno la stessa dimensione che indichiamo con  $n$ . Consideriamo la rappresentazione locale  $\bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La jacobiana di  $\bar{f}$  in  $\varphi(p)$  è una matrice invertibile. Per il teorema della funzione inversa esiste un aperto  $A \subset \varphi(W)$  tale che  $\varphi(p) \in A$ ,  $\bar{f}(A)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $\bar{f}|_A$  è un diffeomorfismo di  $A$  su  $\bar{f}(A)$ . Allora  $U := \varphi^{-1}(A)$  è aperto in  $M$  e  $V' := \psi^{-1} \bar{f}(A)$  è aperto in  $N$ . Inoltre  $f|_U$  è iniettiva e  $V' = f(U)$ . Consideriamo le carte ristrette  $(U, \varphi)$  e  $(V', \psi)$ . Siccome  $f|_U$  è iniettiva, esiste

l'inversa  $(f|_U)^{-1} : V' \rightarrow U$ . In queste carte la rappresentazione locale di  $(f|_U)^{-1}$  è  $\bar{f}^{-1}$  che è una applicazione  $C^\infty$ . Dunque  $(f|_U)^{-1}$  è una applicazione differenziabile, per cui  $f|_U$  è un diffeomorfismo.  $\square$

**Teorema 4** (del rango, versione iniettiva). *Sia  $f : M^m \rightarrow N^n$  una applicazione differenziabile. Sia  $p$  un punto di  $M$  tale che  $df_p$  è iniettivo e sia  $(U, \varphi)$  una carta su  $M$  con  $p \in U$ . Allora, restringendo eventualmente l'aperto  $U$ , si può trovare una carta  $(V, \psi)$  su  $N$ , tale che la rappresentazione locale di  $f$  è*

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

e tale che  $f(U) = \{q \in V : y^{m+1}(q) = \dots = y^n(q) = 0\}$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo una carta  $(W, \eta)$  su  $N$  tale che  $f(p) \in W$ . Restringendo possiamo supporre  $f(U) \subset W$ . Sia  $\tilde{f} = \eta f \varphi^{-1}$  la rappresentazione locale. Il differenziale  $d\tilde{f}_p$  è iniettivo, dunque  $m \leq n$  e la jacobiana di  $\tilde{f}$  in  $\varphi(p)$  ha rango  $m$ . Riordinando le componenti di  $\psi$  possiamo supporre che

$$J\tilde{f}(\varphi(p)) = \begin{pmatrix} B \\ * \end{pmatrix},$$

con  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{R})$ . Sia

$$\Phi : \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \Phi(x, t) := \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{n-m} t_i e_{m+i}.$$

In altri termini

$$\Phi(x, t) = (\tilde{f}^1(x, t), \dots, \tilde{f}^m(x, t), \tilde{f}^{m+1}(x, t) + t_1, \dots, \tilde{f}^n(x, t) + t_{n-m}).$$

Dunque

$$J\Phi(\varphi(p), 0) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema della funzione inversa esiste un aperto  $A$ , tale che  $\Phi(A)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\varphi(p), 0) \in A$  e  $\Phi|_A$  è un diffeomorfismo. Restringendo, possiamo supporre che  $A = A_1 \times A_2 \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-m}$ , dove  $A_1$  e  $A_2$  sono intorni aperti di  $\varphi(p)$  e di 0 rispettivamente. Poniamo  $U' := \varphi^{-1}(A_1)$  e  $V := \eta^{-1}(\Phi(A))$ . Allora  $U' \subset U$  e  $V \subset W$  sono aperti e  $p \in U'$ . Se  $p' \in U'$ , allora  $\varphi(p') \in A_1$ ,

dunque  $\eta f(p') = \tilde{f}(\varphi(p')) = \Phi(\varphi(p'), 0) \in \Phi(A)$ . Dunque  $f(U') \subset V$ . Poniamo  $\psi := (\Phi|_A)^{-1} \circ \eta|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Allora  $(V, \psi)$  è una carta su  $N$ . Nelle carte  $(U', \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  la rappresentazione locale di  $f$  è

$$\bar{f} := \psi f \varphi^{-1} = (\Phi|_A)^{-1} \eta f \varphi^{-1} = (\Phi|_A)^{-1} \tilde{f}.$$

Dunque se  $x \in \varphi(U')$  si ha  $\bar{f}(x) = (\Phi|_A)^{-1} \Phi(x, 0) = (x, 0)$ . Dunque le carte  $(U', \varphi)$  e  $(V, \psi)$  godono della prima proprietà richiesta. Veniamo alla seconda proprietà. Dobbiamo dimostrare che  $f(U') = \{q \in V : y^{m+1}(q) = \dots = y^n(q) = 0\}$ . Poiché  $\psi$  è biunivoca, questa condizione equivale al fatto che  $\psi f(U') = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ . D'altro canto per costruzione  $\psi(V) = A = A_1 \times A_2$ . Quindi  $\psi f(U') = \bar{f}(\varphi(U')) = \bar{f}(A_1) = A_1 \times \{0\} = (A_1 \times A_2) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ . Pertanto le carte  $(U', \varphi)$  e  $(V, \psi)$  godono anche della seconda proprietà richiesta.  $\square$

**Teorema 5** (del rango, versione suriettiva). *Sia  $f : M^m \rightarrow N^n$  una applicazione differenziabile, sia  $p \in M$  e sia  $(V, \psi)$  una carta su  $N$  con  $f(p) \in V$ . Se  $df_p$  è suriettivo, allora esiste una carta  $(U, \varphi)$  su  $M$  tale che  $f(U) \subset V$  e tale che la rappresentazione locale di  $f$  è*

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

*Dimostrazione.* Fissiamo una carta  $(W, \eta)$  su  $M$  con  $p \in W$  e  $f(W) \subset V$ . Sia  $\tilde{f} = \psi f \eta^{-1}$  la rappresentazione locale di  $f$ . Per ipotesi  $df_p$  è suriettivo, dunque  $m \geq n$  e la jacobiana  $J\tilde{f}(\eta(p))$  ha rango  $n$ . Riordinando le componenti di  $\eta$  possiamo supporre che

$$J\tilde{f}(\eta(p)) = \begin{pmatrix} B & * \end{pmatrix},$$

con  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ . Per comodità indichiamo con  $(x, y)$  i punti di  $\mathbb{R}^m$ , dove  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Consideriamo l'applicazione

$$\Phi : \eta(W) \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \Phi(x, y) = (\tilde{f}(x, y), y).$$

Allora

$$J\Phi(\eta(p)) = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Quindi  $J\Phi(\eta(p))$  è invertibile. Per il teorema della funzione inversa esiste un aperto  $A$  contenente  $\eta(p)$  tale che  $\Phi(A)$  è aperto e  $\Phi|_A$  è un diffeomorfismo

su  $\Phi(A)$ . Poniamo  $U := \eta^{-1}(A)$  e  $\varphi := \Phi|_A \circ \eta|_U$ . Allora  $(U, \varphi)$  è una carta,  $f(U) \subset V$  e  $p \in U$ . Consideriamo la rappresentazione locale  $\bar{f} = \psi f \varphi^{-1}$ . Per ogni  $(x, y) \in \varphi(U) = \Phi(A)$  si ha

$$\bar{f}(x, y) = \psi f \eta^{-1}(\Phi|_A)^{-1}(x, y) = \tilde{f}(\Phi|_A)^{-1}(x, y).$$

Indichiamo con  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proiezione sulle prime  $n$  coordinate:  $\pi(x, y) = x$ . Allora  $\tilde{f} = \pi \Phi$ , dunque

$$\bar{f}(x, y) = \tilde{f}(\Phi|_A)^{-1}(x, y) = \pi \Phi(\Phi|_A)^{-1}(x, y) = \pi(x, y) = x.$$

Dunque  $\bar{f}(x, y) = x$ . □

### Lezione 20/10, 13.30-15.30 aula u9-08

**Definizione 6.** Sia  $(M, \mathfrak{A}_{\max})$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$  e sia  $Z$  un sottoinsieme di  $M$ . Diciamo che una carta  $(U, \varphi)$  di  $M$ , con  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ , è una carta  $n$ -dimensionale adattata a  $Z$  se  $U \cap Z = \{x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}$ . Diciamo che  $Z \subset M$  è una sottovarietà regolare di  $M$  di dimensione  $n$  se per ogni punto  $p \in Z$  esiste una carta  $n$ -dimensionale  $(U, \varphi)$  adattata a  $Z$  con  $p \in Z$ .

- Una sottovarietà di dimensione 0 di  $M$  è semplicemente un sottoinsieme discreto di  $M$ .
- Una sottovarietà di dimensione  $m$  di  $M^m$  è semplicemente un sottoinsieme aperto di  $M$ .
- Se  $X$  è uno spazio topologico a base numerabile, allora ogni sottospazio  $Y \subset X$  ammette una base numerabile.
- Se  $X$  è uno spazio a base numerabile, ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sottoricoprimento finito (teorema di Lindelöf, [4, p. 103]).

**Teorema 7.** Sia  $Z \subset M^m$  una sottovarietà regolare di dimensione  $n$ . Sia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  una famiglia di carte adattate ad  $Z$  tale che  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = Z$ . Indichiamo con  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proiezione  $\pi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ . Allora  $\mathfrak{B} = \{(U_\alpha \cap Z, \pi \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  è un atlante differenziabile su  $Z$ , dove si considera su  $Z$  la topologia di sottospazio. Nella struttura differenziabile determinata da questo atlante l'inclusione  $i : Z \hookrightarrow M$  è una immersione liscia.

*Dimostrazione.* La topologia di sottospazio su  $Z$  è di Hausdorff e a base numerabile. Osserviamo che  $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap Z}$  è un omeomorfismo su  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}$ . D'altronde  $\pi$  è un omeomorfismo di  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  su  $\mathbb{R}^n$ . Quindi  $\pi\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap Z}$  è un omeomorfismo, quindi è una carta per  $Z$  nella topologia di sottospazio. Per ipotesi queste carte ricoprono  $Z$ . Ora supponiamo che  $U_\alpha \cap U_\beta \cap Z \neq \emptyset$ . Allora

$$\begin{aligned}\pi\varphi_\beta|_{U_\beta \cap Z} &= \pi_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \circ \varphi_\beta|_{U_\beta \cap Z} \\ (\pi\varphi_\beta|_{U_\beta \cap Z})^{-1}(x) &= \varphi_\beta^{-1} \circ (\pi_{\mathbb{R}^n \times \{0\}})^{-1}(x) = \varphi_\beta^{-1}(x, 0) \\ \pi\varphi_\alpha(\pi\varphi_\beta|_{U_\beta \cap Z})^{-1}(x) &= \pi\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}(x, 0).\end{aligned}$$

Questo cambiamento di coordinate è  $C^\infty$  perché  $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$  è  $C^\infty$ . Dunque  $\mathfrak{B}$  è un atlante e  $Z$  è una varietà differenziabile. La rappresentazione locale della inclusione nelle carte  $(U_\alpha \cap Z, \pi\varphi_\alpha)$  e  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  è semplicemente  $\bar{i}(x) = (x, 0)$ . Dunque  $i$  è liscia ed è una immersione.  $\square$

- Punti critici. Valori critici. Valori regolari. L'insieme  $\text{Crit}(f)$  è chiuso. Per ogni applicazione liscia  $f : M \rightarrow N$  i punti di  $N - f(M)$  sono valori regolare.

**Teorema 8** (del Valore Regolare). *Sia  $f : M^m \rightarrow N^n$  una applicazione liscia e sia  $q \in N$  un valore regolare. Se  $Z := f^{-1}(q)$  è non vuota, allora è una sottovarietà regolare di dimensione  $m - n$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $p \in Z$ . Siccome  $q$  è valore regolare, il differenziale  $df_p$  è suriettivo. Per il teorema del rango nel caso suriettivo si possono trovare delle carte  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  tali che  $\bar{f}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$ . Si può anche supporre che  $\psi(q) = 0$ . Sia  $x \in \varphi(U)$ . Allora si ha  $x \in \varphi(U \cap Z)$  se e solo se  $\varphi^{-1}(x) \in U \cap Z$  se e solo se  $f\varphi^{-1}(x) = q$  se e solo se  $\bar{f}(x) = 0$ . Ma  $\bar{f}(x) = (x^1, \dots, x^n)$ , dunque  $\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Pertanto  $(U, \varphi)$  è una carta adattata  $(m - n)$ -dimensionale.  $\square$

- Insiemi di misura nulla. Teorema di Sard: prima passo della dimostrazione.

### Lezione 22/10, 13.30-14.30 aula u9-08

- Teorema di Sard: fine della dimostrazione.
- Se  $m < n$  ed  $f : M^m \rightarrow N^n$  è una applicazione differenziabile, allora  $f(M) \subsetneq N$ . Applicazione: se  $f : M^m \rightarrow S^n$  è differenziabile e  $m < n$ , allora  $f$  è omotopa ad una applicazione costante.

### Esercitazione 22/10, 14.30-15.30 aula u9-08

- $O(n)$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n(n-1)/2$ . Sia  $\Sigma_n$  lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche e sia  $\mathfrak{o}(n)$  quello delle matrici reali antisimmetriche. Allora  $\dim \Sigma_n = n(n+1)/2$  e  $\dim \mathfrak{o}(n) = n(n-1)/2$ . Sia  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Sigma_n$  l'applicazione  $f(A) = A^T A$ . È una applicazione differenziabile,  $O(n) = f^{-1}(I)$  e  $df_A(X) = X^T A + A^T X$ . Se  $A \in O(n)$ ,  $df_A(X) = (A^{-1}X) + (A^{-1}X)^T$ . Sia  $L_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  l'applicazione  $L_A(X) = AX$ . Se  $A \in O(n)$ , otteniamo  $\ker df_A = L_A(\mathfrak{o}(n))$ . Pertanto per ogni  $A \in O(n)$  il differenziale  $df_A : T_A M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Sigma_n$  ha nucleo di dimensione  $n(n-1)/2$  e quindi è suriettivo. Ciò significa che  $I$  è un valore regolare di  $f$ . Siccome chiaramente  $O(n) \neq \emptyset$ , il teorema del valore regolare assicura che  $O(n)$  è una sottovarietà regolare di  $M_n(\mathbb{R})$  di dimensione  $n(n-1)/2$ .

### Lezione 27/10, 10.30-12.30 aula u9-14

- Partizione dell'unità.
- Aggiunta al Teorema del Valore Regolare: Sia  $f : M^m \rightarrow N^n$  una applicazione liscia e sia  $q \in N$  un valore regolare. Se  $Z := f^{-1}(q)$  è non vuota, allora è una sottovarietà regolare di dimensione  $m-n$ . Indichiamo con  $i : Z \hookrightarrow M$  l'inclusione. Allora  $i$  è una applicazione  $C^\infty$  con differenziale iniettivo in ogni punto. E si ha  $di_p(T_p Z) = \ker df_p$ .
- Se  $f : M^m \rightarrow N^n$  una applicazione liscia,  $Z \subset N$  è una sottovarietà regolare e  $f(M) \subset Z$ , allora possiamo considerare l'applicazione  $g : M \rightarrow Z$  tale che  $g(p) := f(p)$  per ogni  $p \in M$ . ( $g$  è semplicemente  $f$  con codominio cambiato.) Allora  $g$  è liscia.
- Definizione di gruppo di Lie.

- $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie.
- $\text{O}(n)$  è un gruppo di Lie e  $T_I \text{O}(n) = \mathfrak{o}(n)$ .

**Lezione 29/10, 13.30-15.30 aula u9-08**

- Diffeomorfismi locali. Una mappa  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo locale se e solo se  $df_p$  è un isomorfismo per ogni  $p \in M$ .
- Un diffeomorfismo locale biunivoco è un diffeomorfismo.
- Immersioni e sommersioni.
- Curve regolari.
- Una applicazione  $f : M \rightarrow N$  è un *embedding* se è una immersione ed è un omeomorfismo di  $M$  su  $f(M)$ .
- Se  $Z \subset M$  è una sottovarietà regolare, allora l'inclusione  $i''Z \hookrightarrow M$  è un embedding.

**Teorema 9.** *Se  $f : M \rightarrow N$  è un embedding, allora  $Z := f(M)$  è una sottovarietà regolare e  $f : M \rightarrow Z$  è un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Sia  $q \in Z$  e sia  $p \in M$  l'unico punto tale che  $f(p) = q$ . Scegliamo carte  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  come nel teorema del rango nella versione iniettiva. Allora  $f(U) = V \cap \{y^{m+1} = \dots = y^n = 0\}$ . Siccome  $f$  è un omeomorfismo su  $Z$ ,  $f(U)$  è aperto in  $Z$ . Dunque esiste  $V' \subset N$  aperto tale che  $f(U) = V' \cap Z$ . Poniamo  $V'' := V \cap V'$ . Allora  $f(U) \subset V \cap V'$ , dunque

$$\begin{aligned} V'' \cap Z &= V' \cap Z \cap V = f(U) \cap V = f(U) = \\ &= f(U) \cap V' = V \cap \{y^{m+1} = \dots = y^n = 0\} \cap V' = \\ &= V'' \cap \{y^{m+1} = \dots = y^n = 0\}. \end{aligned}$$

Quindi  $(V'', \psi)$  è una carta adattata. Pertanto  $Z$  è una sottovarietà regolare. L'applicazione  $f : M \rightarrow Z$  è liscia, biunivoca ed è una immersione. Siccome  $\dim M = \dim Z$  è un diffeomorfismo locale. Ma allora è un diffeomorfismo.  $\square$

- Se  $f : M \rightarrow N$  è una immersione iniettiva e  $M$  è compatta, allora  $f$  è un embedding.

- Teorema di immersione di Whitney: se  $M$  è una varietà compatta esiste un embedding di  $M$  in uno spazio euclideo di dimensione sufficientemente grande, [1, p. 189-190].

### Esercitazione 29/10, 14.30-15.30 aula u9-08

- Se  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f(x) = 0$  per  $x < 0$  e  $f'(x) > 0$  per  $x > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , allora la curva  $\alpha(t) := (f(t), f(t))$  ha come immagine l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$ . Se  $t \neq 0$  il vettore tangente  $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ .
- Esempi di immersioni iniettive che non sono embedding: [1, p. 71].
- Esempio di una immersione iniettiva  $\mathbb{R} \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$  con immagine densa.

### Lezione 03/11, 10.30-12.30 aula u9-14

**Lemma 10.** *Sia  $M$  un insieme, per ogni  $\alpha \in I$  sia  $U_\alpha$  un sottoinsieme di  $M$  e siano  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  delle applicazioni. Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:*

1.  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $\alpha \in I$ ;
2.  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $\alpha, \beta \in I$ ;
3. per ogni  $\alpha$  l'applicazione  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$  è biunivoca;
4. per ogni  $\alpha, \beta \in I$  l'applicazione  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  è un diffeomorfismo;
5. esiste un sottoinsieme numerabile  $I_0 \subset I$  tale che  $M = \bigcup_{\alpha \in I_0} U_\alpha$ ;
6. se  $p, q \in M$  e  $p \neq q$  o esiste  $\alpha \in I$  tale che  $p, q \in U_\alpha$ , oppure esistono  $\alpha, \beta \in I$  tali che  $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$  e  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ .

Allora esiste su  $M$  una topologia di Hausdorff a base numerabile tale che le applicazioni  $\varphi_\alpha$  siano omeomorfismi. Se si considera su  $M$  questa topologia, allora  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  è un atlante differenziabile.

Per la dimostrazione si veda per esempio [3, Lemma 1.35 p. 21].

- Fibrati localmente banali. Banalizzazioni.
- Fibrati vettoriali. Funzioni di transizione. Sezioni
- Il fibrato tangente è una varietà.

### Lezione 05/11, 13.30-15.30 aula u9-08

- L'applicazione  $\pi : TM \rightarrow M$  è liscia ed è una sommersione.
- Se  $f : M \rightarrow N$  è liscia, l'applicazione

$$TM \rightarrow TN \quad v \mapsto df_{\pi(v)}(v)e$$

è liscia.

- Il fibrato tangente è un fibrato vettoriale reale differenziabile di rango uguale alla dimensione della varietà.
- L'insieme  $\Gamma(U, E)$  delle sezioni  $C^\infty$  del fibrato  $E$  su un aperto  $U$  è uno spazio vettoriale ed anche un modulo sull'anello  $C^\infty(U)$ .

**Teorema 11.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$  un aperto e siano  $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$  ed  $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Supponiamo che  $0 \in \mathbb{R}^m$  sia un valore regolare di  $g$  e che  $X := g^{-1}(0)$  sia non vuoto. Poniamo  $f := F|_X$  e  $h := (F, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ . Allora

$$\text{Crit}(f) = \text{Crit}(h) \cap X.$$

*Dimostrazione.* Per il teorema del valore regolare  $X$  è una sottovarietà regolare di dimensione  $n$ . Sia  $i : X \hookrightarrow \Omega$  l'inclusione. Identifichiamo  $T_p X$  con  $di_p(T_p X) \subset T_p \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}$ . Allora  $T_p X = \ker dg_p$  e  $df_p = dF_p|_{T_p X}$ . Inoltre

$$dh_p = \begin{pmatrix} dF_p \\ dg_p \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\ker df_p = \ker dF_p \cap T_p X = \ker df_p \cap \ker dF_p = \ker dh_p.$$

Per la formula di Grassmann

$$\begin{aligned} \dim \ker dh_p &= n + m - \dim \text{Im } dh_p \\ \dim \text{Im } df_p &= \dim T_p X - \dim \ker df_p = \\ &= n - \dim \ker dh_p = \dim \text{Im } dh_p - m. \end{aligned}$$

Quindi  $p$  è critico per  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  se e solo se  $\dim \operatorname{Im} df_p < k$  se e solo se  $\dim \operatorname{Im} dh_p < m + k$  se e solo se  $p$  è critico per  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ .  $\square$

**Teorema 12.** *Sia  $f : M \rightarrow N$  una sommersione suriettiva. Allora  $p$  è una identificazione aperta. Se  $Z$  è una varietà differenziabile e sia  $g : M \rightarrow Z$  una applicazione che passa al quoziente, cioè esiste  $h : N \rightarrow Z$  tale che  $g = hf$ . Allora  $g$  è liscia se e soltanto se  $h$  è liscia.*

*Dimostrazione.* Le sommersioni sono aperte, dunque  $f$  è continua suriettiva e aperta. Quindi è una identificazione (cioè una mappa quoziente). Se  $g$  è continua, anche  $h$  è continua. Resta da verificare che se  $g$  è  $C^\infty$  anche  $h$  lo è. Fissiamo  $q \in N$ . Per il teorema del rango possiamo fissare una carta  $(U, \varphi)$  su  $M$  ed una carta  $(V, \psi)$  su  $N$  vicino a  $q$ , in modo tale che la rappresentazione locale sia  $\bar{f}(x, y) = x$ . Sia poi  $(W, \eta)$  una carta su  $Z$ . Possiamo supporre restringendo che  $g(U) \subset W$  e  $f(U) \subset V$ . Siccome  $\bar{f}$  è la proiezione sulle prime  $n$  coordinate,  $\bar{f}$  è aperta e  $\bar{f}(\varphi(U))$  è aperto in  $\psi(V)$ . Restringendo  $V$  possiamo supporre  $\bar{f}(\varphi(U)) = \psi(V)$ , cioè  $f(U) = V$ . Ora le rappresentazioni locali soddisfano  $\bar{h}\bar{f} = \bar{g}$ , quindi  $\bar{h}(x) = \bar{g}(x, y)$  per ogni  $x$  nell'aperto  $\psi(V)$ . In realtà siccome  $g$  passa al quoziente,  $\bar{g}$  non dipende da  $y$ . Dunque  $\bar{h}(x) = \bar{g}(x)$ . Quindi  $h$  è liscia su  $V$ .  $\square$

### Lezione 10/11, 10.30-12.30 aula u9-14

- Un campo vettoriale su una varietà  $M$  è una sezione  $C^\infty$  di  $TM$ . L'insieme dei campi vettoriali si indica con  $\mathfrak{X}(M)$ . È uno spazio vettoriale reale.
- Se  $(U, x^1, \dots, x^n)$  è un aperto coordinato, le applicazioni

$$U \ni p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

sono campi vettoriali su  $U$ . Indichiamo questi campi con il simbolo  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . Ogni  $X \in \mathfrak{X}(U)$  è della forma

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

dove  $\xi^i$  sono funzioni su  $U$ . Sia  $\tau$  la banalizzazione di  $TM$  ottenuta tramite  $\varphi$ . Allora  $\tau(X) = (x, \xi)$ . Pertanto  $\xi^i \in C^\infty(U)$ .

- Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $T\Omega \cong \Omega \times \mathbb{R}^n$  e i campi vettoriali su  $\Omega$  sono della forma  $X(x) = (x, F(x))$  con  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  liscia. Identificheremo  $X$  ed  $F$ .
- Se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , definiamo un campo  $f_*X \in \mathfrak{X}(N)$  mediante la formula

$$f_*X(q) := df_{f^{-1}(q)}(X(f^{-1}(q))).$$

- $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  è curva integrale di  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se per ogni  $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$  per ogni  $t \in (a, b)$ .
- Se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , e  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ , allora  $\alpha$  è curva integrale di  $X$  se e soltanto se  $f \circ \alpha$  è curva integrale di  $f_*X$ .
- Sia  $\varphi = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \varphi(U)$  una carta su  $M$ . Allora  $\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$ . Infatti  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  coincide con il vettore tangente alla curva  $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$ . Quindi

$$d\varphi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = e_i$$

dunque  $\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$ . Se  $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , allora

$$\varphi_*X = (\xi^1 \varphi^{-1}, \dots, \xi^n \varphi^{-1}).$$

**Teorema 13.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^\infty$ .*

1. *Per ogni  $x_0 \in \Omega$  ed ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  esiste un intervallo aperto  $I$  con  $t_0 \in I$  ed esiste una applicazione liscia  $x : I \rightarrow \Omega$  tale che*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

2. *Se  $y : J \rightarrow \Omega$  è un'altra soluzione, cioè  $t_0 \in J$ ,  $y(t_0) = x_0$  e  $\dot{y} = F(y)$ , allora  $x = y$  in un intorno di  $t_0$ .*
3. *Se  $x_0 \in \Omega$ , esistono  $\varepsilon > 0$ , un intorno aperto  $V$  di  $x_0$  ed una applicazione liscia  $\theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow \Omega$  tali che per ogni  $x \in \Omega$   $\theta(0, x) = x$  e  $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \theta(t, x)$  è una curva integrale di  $F$ , ossia*

$$\frac{d}{dt} \theta(t, x) = F(\theta(t, x))$$

per ogni  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

- Esistenza del flusso localmente: Teorema 4.2 di [1, p. 133].
- Per ogni  $p \in M$  esiste una curva integrale massimale definita su un intervallo aperto  $I(p) \subset \mathbb{R}$ , vedi Teorema 4.3 di [1, p. 134].
- Corollario 4.4 e Teorema 4.5 di [1, p. 135-6].
- Lemma 5.1 e Corollario 5.3 di [1, p. 139-140].
- Un campo è *completo* se  $W = \mathbb{R} \times M$ . In questo caso  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  è una azione  $C^\infty$  di  $(\mathbb{R}, +)$  su  $M$ .

**Teorema 14** (di linearizzazione). *Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $X(p) \neq 0$ , allora esiste una carta  $(U, x^i)$  vicino a  $p$  tale che su  $U$  si abbia  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\{X(p), v_2, \dots, v_n\}$  una base di  $T_p M$ . Sia  $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$  una applicazione  $C^\infty$  tale che  $g(0) = p$ ,  $dg_0(e_i) = v_i$  per  $i = 2, \dots, n$ . (Chiamo  $\{e_2, \dots, e_n\}$  la base standard di  $\mathbb{R}^{n-1}$ .) Siano  $\varepsilon > 0$  e  $V$  un intorno di  $p$  tali che sia definito e liscio il flusso  $\theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow M$  di  $X$ . Su un intorno di  $0 \in \mathbb{R}^n$  è definita la mappa

$$h(x_1, \dots, x_n) := \theta(x_1, g(x_2, \dots, x_n)).$$

Si verifica che  $dg_0(e_1) = X(p)$ ,  $dg_0(e_i) = v_i$  per  $i \geq 2$ . Dunque  $dg_0$  è un isomorfismo. per il teorema della funzione inversa esiste un aperto  $\Omega$  contenente  $0$  tale che  $U := h(\Omega)$  è aperto e  $h|_\Omega : \Omega \rightarrow U$  è un diffeomorfismo. Sia  $\varphi := (h|_\Omega)^{-1}$ . Quindi  $\varphi : U \rightarrow \Omega$  è una carta. Resta da dimostrare che in questa carta  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ . Ciò equivale a verificare che  $\varphi_* X = e_1$ . Calcoliamo il flusso di  $\varphi_* X$ . Siccome  $\theta$  è il flusso di  $X$ , il flusso di  $\varphi_* X$  è dato da

$$\begin{aligned} &(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ &(t, x) \mapsto \varphi\theta(t, \varphi^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \varphi\theta(t, \varphi^{-1}(x)) &= \varphi\theta(t, h(x)) = \varphi\theta(t, \theta(x_1, g(x_2, \dots, x_n))) = \\ &= \varphi\theta(t + x_1, g(x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \varphi h(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Dunque il flusso di  $\varphi_* X$  coincide con il flusso di  $e_1$ . Pertanto  $\varphi_* X = e_1$  e  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ . □

**Esercitazione 12/11, 8.30-10.30 aula u1-06**

- Ogni varietà compatta  $M^n$  ammette sempre un embedding in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Vedi p.e. [3, Lemma 6.13 p. 132].
- Fibrato tautologico su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Poniamo  $V := \mathbb{C}^{n+1}$  e  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Sia  $E := \{(\ell, v) \in \mathbb{P} \times V : v \in \ell\}$ .

Poniamo anche

$$U_j = \{[z] \in \mathbb{P} : z_j \neq 0\} \quad \tilde{U}_j = \{z \in V : z_j \neq 0\}.$$

Si verifica che  $\pi : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$  è liscia ed è una sommersione e anche che  $E$  è una sottovarietà di  $\mathbb{P} \times V$ . Sia  $p := \text{pr}_1|_E : E \rightarrow \mathbb{P}$ . Questa è una applicazione liscia. La fibra di  $p$  su  $\ell$  è  $\{\ell\} \times \ell$ . Su di essa fissiamo la struttura di spazio vettoriale complesso di dimension 1 tale che la proiezione sul secondo fattore sia un isomorfismo  $\text{pr}_2 : \{\ell\} \times \ell \rightarrow \ell$ . Consideriamo le funzioni  $f_j : U_j \rightarrow V$ ,  $f_j([z]) = z/z_j$ . Esse sono lisce. Poniamo  $s_j([z]) = ([z], f_j(z))$ . Per ogni  $[z] \in U_j$ , il vettore  $s_j(z) \in E_{[z]}$  è non nullo, dunque è una base della retta  $p^{-1}(\ell)$ . Definiamo  $\tau_j : p^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{C}$  nel modo seguente: se  $\xi \in p^{-1}(U_j)$ , allora posto  $\ell = p(\xi)$ , ho  $\xi \in E_\ell$ , dunque  $\xi = \lambda \cdot s_j(\ell)$ . Allora definisco

$$\tau_j(\xi) := (\ell, \lambda).$$

$\tau_j$  è un diffeomorfismo di  $p^{-1}(U_j)$  su  $U_j \times \mathbb{C}$ . Inoltre è una banalizzazione e  $p : E \rightarrow \mathbb{P}$  è un fibrato vettoriale complesso di rango 1.

- Embedding di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  nello spazio delle matrici Hermitiane. Consideriamo il prodotto Hermitiano standard su  $\mathbb{C}^{n+1}$ ,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=0}^n z_i \bar{w}_i.$$

Il prodotto scalare reale è la parte reale di  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $T_z S^{2n+1} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w \rangle \in i\mathbb{R}\}$ . Sia  $H$  lo spazio vettoriale (reale!) delle matrici Hermitiane  $(n+1) \times (n+1)$ .

Definiamo  $F : S^{2n+1} \rightarrow H$  decidendo che  $F(z) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  è la proiezione ortogonale (in senso Hermitiano) sulla retta  $\mathbb{C}z$ . Si verifica che se  $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ , allora  $F(z)(w) = \langle w, z \rangle z$ . Pertanto  $F$  è liscia.  $F$

passa al quoziente perché la proiezione su una retta dipende solo dalla retta, non dal generatore scelto per essa. Quindi esiste  $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow H$  continua.

Se  $w \in T_z S^{2n+1}$ , allora  $dF_z(w) \in H$  e l'azione di  $dF_z(w)$  su un vettore  $v \in \mathbb{C}^{n+1}$  è

$$dF_z(w)v = \langle v, w \rangle z + \langle v, z \rangle w.$$

Se  $w \in \ker dF_z$ , scelgo  $v = w$  e ottengo  $w = itz$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Dunque  $\ker dF_z = i\mathbb{R}z$ .

L'applicazione  $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è ancora sommersiva e  $\ker d\pi_z = i\mathbb{R}z$ . Dunque  $f$  è liscia ed è una immersione. Siccome è anche iniettiva è un embedding che identifica  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  con l'insieme dei proiettori ortogonali di rango 1.

#### Esercitazione 17/11, 10.30-11.30 aula u9-14

- Differenziale del determinante.
- $SL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R})$  sono gruppi di Lie.  $U(n), SU(n)$  sono gruppi di Lie compatti.

#### Lezione 17/11, 11.30-12.30 aula u9-14

- Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Consideriamo l'applicazione  $D_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definita dalla formula

$$(D_x f)(p) := X(p)f_p.$$

( $f_p$  è il germe di  $f$  in  $p$ .) L'applicazione  $D_x$  è una *derivazione*, cioè è  $\mathbb{R}$ -lineare e inoltre  $D_X(fg) = (D_X f)g + f(D_X g)$ . Indichiamo la funzione  $D_X f$  semplicemente con la notazione  $Xf$ .

- Commutatore di campi vettoriali, vedi [1, p. 152].

#### Lezione 19/11, 13.30-14.30 aula u9-08

- Definizione della derivata di Lie di due campi vettoriali.
- La derivata di Lie è ancora un campo vettoriale.
- la derivata di Lie di due campi vettoriali coincide con il commutatore:  $L_X Y = [X, Y]$ .

**Esercitazione 19/11, 14.30-15.30 aula u9-08**

- Definizione della grassmanniana.
- La grassmanniana è uno spazio di Hausdorff.

### Esercitazione 01/12, 8.30-9.30 aula u9-14

- Azioni propriamente discontinue.
- Se  $X$  è uno spazio topologico di Hausdorff e  $G$  è un gruppo finito che agisce su  $X$  in modo libero, allora l'azione è propriamente discontinua.
- Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $G$  un gruppo che agisce su  $X$  per omeomorfismi. Supponiamo che esista  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $x \in X$  e per ogni  $g \neq 1$  si abbia  $d(gx, x) \geq \varepsilon$ . Allora l'azione è propriamente discontinua. (Basta porre  $U := B(x, \varepsilon/2)$ ).
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\{\pm 1\}$ . L'azione di  $G = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2$  su  $S^n$  è libera, dunque propriamente discontinua.
- Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili. Una applicazione  $p : M \rightarrow N$  è un *rivestimento liscio* o *differenziabile* se è un rivestimento, è  $C^\infty$  e per ogni banalizzante  $V \subset N$  ed ogni componente connessa  $U$  di  $p^{-1}(V)$  la restrizione  $p|_U$  è un diffeomorfismo di  $U$  su  $V$ .
- Supponiamo che  $p : M \rightarrow N$  sia un rivestimento e che sia  $C^\infty$ . Allora  $p$  è un rivestimento liscio se e soltanto se è un diffeomorfismo locale.

### Esercitazione 10/12: 13.30–14.30, aula 09-08

- La grassmanniana complessa e la grassmanniana reale sono varietà differenziabili.
- $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$  agisce in modo continuo su  $\text{G}(r, \mathbb{C}^n)$  e l'azione di  $\text{U}(n) \subset \text{Gl}(n, \mathbb{C})$  è transitiva.
- $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$  agisce in modo continuo su  $\text{G}(r, \mathbb{R}^n)$  e l'azione di  $\text{O}(n) \subset \text{Gl}(n, \mathbb{C})$  è transitiva.
- Le grassmanniane sono varietà compatte.

**Teorema 15.** *Se  $M$  ed  $N$  sono varietà differenziabili,  $M$  compatta,  $N$  connessa e  $p : M \rightarrow N$  è un omeomorfismo locale, allora  $p$  è un rivestimento. Se  $p$  è un diffeomorfismo locale, allora è un rivestimento liscio.*

*Dimostrazione.*  $p(M)$  è aperto in  $N$  perché  $p$  è aperta. Ma è anche compatto, quindi chiuso. Pertanto  $p$  è suriettiva. Le fibre di  $p$  sono chiuse e discrete perché  $p$  è un omeomorfismo locale, quindi  $p$  è localmente iniettiva. Siccome  $M$  è compatta, le fibre di  $p$  sono finite. Fissiamo  $y \in N$  e sia  $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Per ogni  $i$  scelgo un intorno aperto  $W_i$  di  $x_i$  tale che  $p(W_i)$  sia aperto e  $p|_{W_i}$  sia un omeomorfismo di  $W_i$  sulla sua immagine. Restringendo posso supporre che gli  $W_i$  siano a due a due disgiunti. Consideriamo l'insieme

$$A := \bigcap_{i=1}^k p(W_i) - p\left(M - \bigsqcup_{i=1}^k W_i\right).$$

L'insieme  $M - \bigsqcup_{i=1}^k W_i$  è chiuso dunque compatto. Pertanto  $p(M - \bigsqcup_{i=1}^k W_i)$  è chiuso in  $N$ . Quindi  $A$  è aperto. Inoltre  $p \in A$ . Sia  $V$  un intorno aperto e connesso di  $p$  contenuto in  $A$ . Affermiamo che  $V$  è un banalizzante. Siccome  $V \cap p(M - \bigsqcup_{i=1}^k W_i) = \emptyset$ , si ha  $p^{-1}(V) \subset \bigsqcup_{i=1}^k W_i$ . Pertanto

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$$

dove  $U_i := W_i \cap p^{-1}(V)$ . Siccome  $U_i \subset W_i$ ,  $p|_{U_i}$  è un omeomorfismo da  $U_i$  su  $p(U_i)$ . Chiaramente  $p(U_i) \subset V$ . Ma  $V \subset p(W_i)$ , dunque  $p(U_i) = V$ . Pertanto  $U_i$  è omeomorfo a  $V$  e in particolare è connesso. Siccome  $p^{-1}(V)$  è unione degli  $U_i$  che sono connessi disgiunti, questi sono esattamente le sue componenti connesse. Abbiamo dimostrato che  $V$  è un banalizzante. Se poi  $p$  è liscia ed è un diffeomorfismo locale, serve dall'osservazione precedente che  $p$  è un rivestimento liscio.  $\square$

### Esercitazione 17/12, 13.30-14.30, aula u9-08

- Se  $M$  è una varietà differenziabile,  $A \subset M$  è un aperto e  $K \subset A$  è un compatto, allora esiste una funzione  $\chi \in C^\infty(M)$  tale che  $\text{supp}(\chi)$  è un sottoinsieme compatto di  $A$  e  $\chi \equiv 1$  su  $K$ . Infatti sia  $A' \subset A$  un aperto contenente  $K$  e tale che  $\overline{A'}$  sia compatto e contenuto in  $A$ . Sia  $B := M - K$  e sia  $\{\varphi_{A'}, \varphi_B\}$  una partizione dell'unità relativa al ricoprimento  $\{A', B\}$ . Basta porre  $\chi := \varphi_{A'}$ .
- Poniamo

$$\text{Diff}_0(M) := \{f \in \text{Diff}(M) : \exists Q \subset M \text{ compatto, tale che } f(p) = p \text{ per ogni } p \in M - Q\}.$$

- Se  $M$  è una varietà differenziabile e  $K \subset M$  è un compatto, e  $p, q$  sono due punti che stanno nella stessa componente connessa di  $M - K$ , allora esiste sempre  $f \in \text{Diff}_0(M)$  tale che  $f(x) = x$  per ogni  $x \in K$  e  $f(p) = q$ .
- Sia  $X$  un insieme e  $k$  un intero positivo. Sia  $\Delta_k \subset X^k$  l'insieme delle  $k$ -uple  $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$  con almeno due coordinate uguali, cioè le  $k$ -uple per le quali esistono  $i, j$ , tali che  $i \neq j$  e  $x_i = x_j$ .  $\Delta_k$  si chiama *grande diagonale*.
- Se  $G$  è un gruppo che agisce su un insieme  $X$ , allora  $G$  agisce anche su  $X^k - \Delta_k$ :

$$g \cdot (x_1, \dots, x_k) := (gx_1, \dots, gx_k).$$

Diciamo che l'azione di  $G$  su  $X$  è  $k$ -transitiva se è transitiva l'azione di  $G$  su  $X^k - \Delta_k$ .

- Per ogni varietà differenziabile  $M$  e per ogni intero  $k > 0$ , l'azione del gruppo  $\text{Diff}_0(M)$  su  $M$  è  $k$ -transitiva.
- Quindi se  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  sono insiemi finiti,  $\mathbb{R}^2 - A$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2 - B$  se e solo se  $|A| = |B|$ .

### Esercitazione 07/01/2015, ore 13.30-14.30

- Azioni lisce di gruppi di Lie su varietà differenziabili.

**Teorema 16.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $G$  un gruppo che agisce su  $M$  in modo propriamente discontinuo e differenziabile. Se il quoziente  $N := M/G$  è di Hausdorff, esso ammette una unica struttura differenziabile tale che la proiezione  $\pi : M \rightarrow N$  sia un rivestimento liscio.*

*Dimostrazione.* Consideriamo le terne  $(V, U, \varphi)$  dove  $V \subset N$  è un banalizzante,  $U$  è una componente connessa di  $\pi^{-1}(V)$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una carta di  $M$ . Data questa terna, costruiamo una carta di  $N$  nel modo seguente: il dominio della carta è  $V$  e la carta è  $\psi := \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$ . Dobbiamo provare che le carte ottenute in questo modo sono compatibili. Se  $(V', U', \varphi')$  è un'altra terna e  $V \cap V' = \emptyset$  allora non c'è niente da dimostrare. Se invece  $V \cap V' \neq \emptyset$ , restringendo possiamo supporre che  $V = V'$ . Dunque  $U$  e  $U'$  sono due componenti connesse di  $\pi^{-1}(V)$ , quindi esiste un unico  $g \in G$  tale che  $U' = gU$  e

$\pi|_{U'} \circ g = \pi|_U$ . Dobbiamo provare che  $\psi'\psi^{-1}$  è liscia, dove  $\psi' := \varphi' \circ (\pi|_{U'})^{-1}$ . Ma  $\psi'\psi^{-1} = \varphi'(\pi|_{U'})^{-1}\pi|_U\varphi^{-1} = \varphi'g\varphi^{-1}$  e questa è una applicazione liscia perché  $g$  è un diffeomorfismo di  $M$ . Quindi le carte che abbiamo costruito sono compatibili e formano un atlante differenziabile di  $N$ . Se  $(V, U, \varphi)$  è una terna come sopra e  $\psi = \varphi(\pi|_U)^{-1}$ , allora  $\psi\pi\varphi^{-1}(x) = x$ , dunque  $\pi$  è liscia ed è un diffeomorfismo locale. Pertanto è un rivestimento liscio. Vediamo che questa struttura è unica. Consideriamo su  $N$  un'altra struttura differenziabile  $\mathfrak{A}'$  tale che  $\pi$  sia un rivestimento liscio. Dato  $p \in N$ , fisso una terna  $(V, U, \varphi)$  tale che  $p \in V$  e pongo  $\psi := \varphi(\pi|_U)^{-1}$ . Sia poi  $\psi'$  una carta di  $\mathfrak{A}'$  vicino a  $p$ . Restringendo posso supporre che anche  $\psi'$  sia definita su  $V$ . Sempre restringendo, posso supporre che  $\pi|_U$  sia un diffeomorfismo rispetto alla struttura  $\mathfrak{A}'$  su  $N$ . Ma allora  $\psi'\pi\varphi^{-1} = \psi'\psi^{-1}$  è liscia. Quindi le carte  $\psi'$  e  $\psi$  sono compatibili, per cui la struttura  $\mathfrak{A}'$  coincide con quella appena definita.  $\square$

- Sia  $G = \{\text{radici } m\text{-esime dell'unità}\} \cong \mathbb{Z}/m$  e siano  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Consideriamo l'azione di  $G \curvearrowright S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ :

$$\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) := (\zeta^{a_1} z_1, \dots, \zeta^{a_n} z_n).$$

Se per ogni  $i$  il peso  $a_i$  è primo con  $m$ , allora l'azione è libera, dunque propriamente discontinua.  $M/G$  è una varietà compatta.

### Esercitazione 12/01/2015, ore 10.30-12.30

- Alcuni esercizi sulle varietà differenziabili e i punti critici.
- L'azione di  $\text{Gl}(n+1, K)$  su  $\mathbb{P}^m(K)$  è liscia ( $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ).
- Se  $M$  è una varietà compatta e  $\dim M \geq k$ , allora ogni applicazione liscia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  ha almeno un punto critico.

## Riferimenti bibliografici

- [1] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.

- [2] D. Conti. Note del corso di geometria III, anno 2013-2014. disponibili alla pagina <http://peano.matapp.unimib.it/~conti/note14.pdf>.
- [3] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [4] M. Manetti. *Topologia*. Springer. xii, 297 p., 2008.
- [5] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.