TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA

Teorema della Funzione Inversa in $\mathbb{R}^n$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞
$a \in \Omega$. Se [redacted] $dg_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e'
un isomorfismo, allora $\exists\ A \subset \Omega$ aperto
t.c. $a \in A$, $g(A) \subset \mathbb{R}^n$ e' aperto
e $g|_A : A \longrightarrow g(A)$ e' un diffeomorfismo

Teorema della funzione Inversa fra varietà

Siano M ed N varietà differenziabili
e sia $F : M \longrightarrow N$ una applicazione
liscia. Sia $p \in M$ e supponiamo che il
differenziale $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ sia
un isomorfismo. Allora esiste un
aperto $A \subseteq M$ tale che $p \in A$,
$F(A) \subset N$ sia aperto ed
$F|_A : A \longrightarrow F(A)$ sia un diffeo.

<u>dim</u>. Scegliamo carte (U,φ) su M^m e (V,ψ) su N^n tali che $p\in U$ ed $F(U)\subset V$. Sia

$$\bar F := \psi\circ F\circ\varphi^{-1} : \underset{\subseteq\mathbb{R}^m}{\varphi(U)} \longrightarrow \psi(V)\subset\mathbb{R}^n$$

Per ipotesi dF_p e' invertibile

$\Longrightarrow$ $m=n$ e la matrice $\boxed{a:=\varphi(p)}$

$J\bar F(a)$ e' invertibile, ossia $d\bar F_a$ e' un isomorfismo. Per il Teo delle Funzioni Inverse in $\mathbb{R}^n$ $\exists$ un aperto $A'\subset\varphi(U)$ tale che $a\in A'$

$\bar F(A')\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto e

$\bar F|_{A'} : A'\longrightarrow \bar F(A')$ diffeo.

Poniamo $A:=\varphi^{-1}(A')\subset M$.

Allora $F(A)=\psi^{-1}\bar F(A')\subset N$ e' aperto e

$F|_A : A\longrightarrow F(A)$ e' diffeo. ///

<u>Def</u>: Se M ed N sono varietà diff. una applicazione $F : M \to N$ è una <u>diffeomorfismo</u> <u>locale</u> se è C^∞ e se $\forall p \in M$ [redacted] esiste un aperto $A \subset M$ tale che $p \in M$, $F(A) \subset N$ sia aperto ed $F|_A : A \longrightarrow F(A)$ sia un [redacted] diffeomorfismo.

Segue dal Teo della Funzione Inversa che $F : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo locale $\iff$ $\dim M = \dim N$ e $\forall p \in M$ dF_p è un isomorfismo di T_pM su $T_{F(p)}N$.

Un diffeomorfismo locale è automaticamente un omeomorfismo locale dunque una applicazione aperta.

Teorema del Rango (caso iniettivo)

Sia $M^m \xrightarrow{F} N^n$ una applicazione C^∞ tra varietà. Sia $p \in M$ tale che dF_p è iniettivo. Allora esistono carte (U, φ) su M e (V, ψ) su N t.c. $p \in U$, $F(U) \subset V$

e

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$$

qui $x = (x^1 \text{—} x^m) \in \mathbb{R}^m$

e $(x, 0) = (x^1 \text{—} x^m, \underbrace{0 \text{—} 0}_{n-m}) \in \mathbb{R}^n$

<u>dim</u>

Scriviamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^{n-m}_y$.

Scegliamo carte qualsiasi $(\tilde{U}, \varphi)$ su M e $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ su N

t.c. $p \in \tilde{U}$ $F(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$.

Poniamo $\tilde{F} := \tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(\tilde{U}) \to \mathbb{R}^n$.

~~Ridefinendo le coordinate~~

La jacobiana $J\tilde{F}(a)$ $a = \varphi(p)$

ha rango m perché dF_p è iniettivo.

Riordinando le coordinate su $\mathbb{R}^n$ posso (5)

supporre che

$$J_a \tilde{F} = \begin{pmatrix} \boxed{A} \\ \hline * \end{pmatrix}$$

blocco $m \times m$ invertibile

di questo me ne infischio.

Definiamo

$$\Phi : \varphi(\tilde{U}) \times \mathbb{R}^{n-m}_y \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(x,y) = \tilde{F}(x) + \sum_{i=1}^{n-m} y_i e_{m+i}$$

dove $e_1 - e_n$ e' la base standard di $\mathbb{R}^n$.

Allora

$$J_{(a,0)} \Phi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $J_{(a,0)} \Phi$ e' invertibile. Per il Teo della funzione inversa posso trovare $A \subset \varphi(\tilde{U}) \times \mathbb{R}^{n-m}$ tale che $(a,0) \in A$

$\Phi(A) \subset \mathbb{R}^n$ e' aperto e $\Phi|_A : A \to \Phi(A)$ e' un diffeomorfismo.

$$\Phi(A) = B$$

Inoltre restringendo A posso supporre che A sia della forma

$$A = A_1 \times B(0,\varepsilon)$$

$$a \in A_1 \subseteq \mathbb{R}^m \qquad 0 \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^{n-m}.$$

Poiché $\tilde{\Psi}(F(p)) = \tilde{F}(a) = \Phi(a,0)$ [redacted]

ho $\tilde{\Psi}(F(p)) \in B$.

Dunque $V := \tilde{\Psi}^{-1}(B)$ e' un intorno aperto di $F(p)$ in N, e

$$\psi := (\Phi|_A)^{-1} \circ \tilde{\Psi} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

e' una carta perché $\Phi|_A$ e' un diffeo. Poniamo $U := \tilde{U} \cap F^{-1}(V) \cap \varphi^{-1}(A_1)$

$U \neq \emptyset$ perché $p \in U$. Vogliamo mostrare che (U,φ) e (V,ψ) sono le carte che cerchiamo. Infatti se $x \in \varphi(U)$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (\Phi|_A)^{-1} \circ \tilde{\Psi} \circ F \circ \varphi^{-1}(x) =$$

$$= (\Phi|_A)^{-1}(\tilde{F}(x)) = (\Phi|_A)^{-1}(\Phi(x,0)).$$

Ma se $x \in \varphi(U) \subset A_1$

$$(x,0) \in A_1 \times B(0,\varepsilon) = A$$

$$\Rightarrow \quad (\Phi|_A)^{-1} \Phi(x,0) = (x,0)$$

$$\Rightarrow \quad \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x,0) \qquad \forall x \in \varphi(U)$$

come desiderato. //

Osservazione si può raffinare leggermente il precedente enunciato, aggiungendo che (U,φ) e (V,ψ) possono essere scelte in modo tale che valga

$$\psi(F(U)) = \psi(V) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : y = 0\}$$

Infatti l'inclusione $\subseteq$ è ovvia. Mostriamo che restringendo U e V possiamo fare in modo che valga anche l'inclusione "$\supseteq$".

Se $\delta > 0$ e' abbastanza piccolo avremo $(-\delta, \delta)^m \subseteq \varphi(U)$.

Allora

$$(-\delta,\delta)^m \times \{0\} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\left((-\delta,\delta)^m\right)$$

$$\Rightarrow \quad (-\delta,\delta)^m \times \{0\} \subseteq \psi(V).$$

Dunque $\exists\, \eta > 0$ t.c.

$$(-\delta,\delta)^m \times (-\eta,\eta)^{n-m} \subseteq \psi(V).$$

Sia $\varepsilon = \min\{\delta, \eta\} > 0$

e siano

$$V' := \psi^{-1}\left((-\varepsilon,\varepsilon)^n\right)$$

$$U' := \varphi^{-1}\left((-\varepsilon,\varepsilon)^m\right).$$

Allora $F(U') \subset V'$ (dimostrare!)

$\psi F \varphi^{-1}(U') = (-\varepsilon,\varepsilon)^m \times \{0\} =$ [redacted]

$= \psi(V') \cap \{y = 0\}$ ///.

Teorema del Rango (caso suriettivo)

Sia $F: M^m \longrightarrow N^n$ una applicazione C^∞ e sia $p \in M$ un punto tc dF_p sia suriettivo.
Allora esistono carte (U,φ) su M e (V,ψ) su N tali che $p \in U$, $F(U) \subset V$

e $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x,y) = x$.

(Qui scriviamo $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^{m-n}_y$.)

Dim

Siano $(\tilde U, \tilde\varphi)$ e (V,ψ) carte qualsiasi soggette solo alle condizioni $p \in \tilde U$ e [redacted] $F(\tilde U) \subset V$.

Sia $a = \tilde\varphi(p)$.
Poniamo $\tilde F = \psi \circ F \circ \tilde\varphi^{-1} : \tilde\varphi(\tilde U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$J_a \tilde F$ ha rango n perché dF_p è suriettivo.
Riordinando le coordinate in $\mathbb{R}^m$ posso supporre che $J_a \tilde F = (A \quad *)$

con $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Poniamo

$\Phi(x,y) = (\tilde F(x,y), y)$ $\qquad \Phi : \tilde\varphi(\tilde U) \to \mathbb{R}^m$.

$$J_a \Phi = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $J_a \Phi$ e' invertibile

Allora $\exists$ un aperto $\Omega \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$

t.c. $a \in \Omega$ $\Phi(\Omega)$ e' aperto

e $\Phi|_\Omega : \Omega \longrightarrow \Phi(\Omega)$ e' diffeo.

Pongo $U := \tilde{\varphi}^{-1}(A) \subset \tilde{U} \subset M$

e $\varphi := \Phi|_\Omega \circ \tilde{\varphi}$.

Allora (U, φ) e' una carta di M e $p \in U$.

Inoltre indichiamo con

$\pi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la proiezione sulle

prime n coordinate $\pi(x,y) = x$.

Allora $\tilde{F} = \pi \circ \Phi$. Dunque

se $(x,y) \in \varphi(U) \subseteq \Omega$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x,y) = \psi \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\Phi|_\Omega)^{-1}(x,y) =$$

$$= \tilde{F} \circ (\Phi|_\Omega)^{-1}(x,y) = \pi \; \Phi|_\Omega \circ (\Phi|_\Omega)^{-1}(x,y)$$

$$= \pi(x,y) = x.$$

///