# Lemma di costruzione.

$M$ = insieme.

$U_\alpha \subseteq M \qquad \alpha \in I$

$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ bigezione

$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ aperto in $\mathbb{R}^n$

- $M = \bigcup U_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i}$

- $\forall \alpha, \beta \qquad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

  $\Rightarrow \quad \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e' aperto in $\varphi_\alpha(U_\alpha)$

  ($\Longrightarrow$ in $\mathbb{R}^n$).

- $\forall \alpha\beta \quad \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} \in C^\infty$.

- $\forall\, p, q \in M \qquad p \neq q$

  o esiste $\alpha \in I \qquad p, q \in U_\alpha$

  o esistono $\alpha, \beta \in I \qquad p \in U_\alpha \quad q \in U_\beta$

  e $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

Allora $\exists$ unica top

su $M$ t.c. $\qquad \varphi_\alpha$ siano carte

e $(M, \mathcal{U})$ e' varietà.

# Fibrati

$B$ = spazio top, $E$ = spazio topologico

$p : E \longrightarrow B$ applicazione continua.

Sia $F$ = altro spazio topologico.

**Def** $p : E \longrightarrow B$ è un fibrato localmente banale a fibra tipo $F$

se $\forall x \in B$ $\exists$ un intorno aperto $U \ni x$ ed un omeomorfismo

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\tau} U \times F \qquad \tau = \text{banalizzazion}$$

tale che

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d, "pr_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

dove $pr_1$ è la proiezione sul primo fattore.

**Esercizio:** $p$ è suriettiva e aperta $\Rightarrow$ è una identificazione.

**Esercizio** un rivestimento è un fibrato localmente banale.

**Def:** la fibra su $b$ è $p^{-1}(b)$ $b \in B$

$\forall b \in B \qquad p^{-1}(b) \cong F.$

$$
\begin{tikzcd}
E_b := p^{-1}(b) \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\text{omeo}"'] & \{b\} \times F \arrow[r, "pr_2"] & F
\end{tikzcd}
$$

<u>Definizione</u> Ora supponiamo che $E \xrightarrow{p} B$ sia un fibrato localmente banale e fibra tipo $F = \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $\forall b$ $E_b$ sia provvisto di una struttura di spazio vettoriale di dimensione $r$.

Inoltre supponiamo che $\forall x \in B \ \exists U$ ed una banalizzazione

$\tau : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ con la seguente propietà:

$\forall x \in U$

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(x) \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right] & \{x\} \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "pr_2"] & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

questo oltre ad essere un omeomorfismo è anche un isomorfismo di spazi vettoriali.

Allora diciamo che $E \xrightarrow[p]{} B$ è un <u>fibrato vettoriale</u> <u>reale</u> di <u>rango $r$</u>.

Stessa definizione per i fibrati vettoriali complessi.

---

Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato vettoriale reale o complesso. Siano

$$\tau : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times k^r \quad e \quad \sigma : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times k^r$$

due banalizzazioni. Supponiamo $U \cap V \neq \emptyset$.

Allora su $U \cap V$ ho due banalizzazioni

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U \cap V) \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "\sigma"'] & U \cap V \times \mathbb{C}^k \\
U \cap V \times \mathbb{C}^k \arrow[ur, bend right, "\tau \circ \sigma^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\tau \circ \sigma^{-1} : U \cap V \times \mathbb{C}^k \longrightarrow U \cap V \times \mathbb{C}^k$$

$$\tau \circ \sigma^{-1}(x, v) = (x, f(x, v))$$

Se fisso $x$, l'applicazione

$$v \longmapsto f(x, v) \quad \text{è un isomorfismo lineare}$$

quindi esiste una matrice

$g(x) \in GL(\cancel{k}, \mathbb{C})$ tale che

$$f(x,v) = g(x)\, v$$

Infatti ~~$f(x, v$~~

$$g(x) = \big( f(x,e_1) \; .... \; f(x,e_k) \big).$$

Quindi $g : U \cap V \longrightarrow GL(k, \mathbb{C})$ e' una funzione continua. e

$$\tau \circ \sigma^{-1}(x,v) = (x,\; g(x)\, v)$$

$g$ si chiama <u>funzione di transizione</u>.

Se fisso una ~~sist~~ famiglia di trivializzazioni

$$\{ \tau_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k \}_{\alpha \in I}$$

dove $B = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ (una famiglia come questa si chiama ATLANTE di FIBRATO) $\forall \alpha$ e $\beta$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

ottengo una funzione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL$

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(k, \mathbb{C})$$

tale che $\quad \tau_\alpha \tau_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) v)$.

Queste funzioni di transizione soddisfano

$g_{\alpha\alpha} \equiv 1$

$$g_{\alpha\beta}(x)\, g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \quad \text{su} \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

Infatti

$$(x, g_{\alpha\gamma}(x) v) = \tau_\alpha \tau_\gamma^{-1}(x, v) = \tau_\alpha \tau_\beta^{-1}(\tau_\beta \tau_\gamma^{-1}(x, v))$$

$$= \tau_\alpha \tau_\beta^{-1}(x, \ g_{\beta\gamma}(x) v)$$

$$= (x, \ \underline{g_{\alpha\beta}(x)\, g_{\beta\gamma}(x)} \cdot v)$$

<u>Sezioni</u> Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato localmente banale a fibra tipo $F$. Una <u>sezione</u> di $E$ e' una applicazione continua $s : B \longrightarrow E$ tc. $p\sigma = id_B$.

<u>Esempio</u> sugg $E = B \times F \xrightarrow[p = pr_1]{} B$

questo e' il fibrato prodotto.

Cosa e' una sezione del fibrato prodotto?

$s : B \longrightarrow B \times F$

t.c. $pr_1 s = id_B$

Scrivo $s(b) = (\beta(b), f(b))$

$\Rightarrow \beta(b) = b.$

Quindi $s(b) = (b, f(b))$

dunque $s \longleftrightarrow f \in C(B, F)$

In questo caso sezioni = funzioni.

Le sezioni ~~sono~~ una generalizzazione delle funzioni.

---

Sia ora $E \xrightarrow[p]{} B$ un fibrato vettoriale e sia $\tau_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ un atlante di fibrato.

~~Sbie~~ Sia $s$ una sezione di $E$.

Allora $\quad \tau_\alpha s\ (x) = (x, s_\alpha(x))$

dove $\quad s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e' una funzione continua.

Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora

$$(x, s_\alpha(x)) = \tau_\alpha\ (s(x)) = \tau_\alpha \tau_\beta^{-1}\ (\tau_\beta(s(x)) =$$

$$= \tau_\alpha \tau_\beta^{-1}\ \cancel{s_\beta(x)}\ (x, s_\beta(x)) =$$

$$= (x,\ g_{\alpha\beta}(x)\, s_\beta(x))$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta}$$

Morale: se $s$ e' una sezione, allora ottengo una famiglia di funzioni locali $s_\alpha$ t.c. $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$.

Viceversa: date queste definisco una sezione.

Se $E$ e $B$ sono varietà differenziabili e $p$ è applicazione liscia, ~~allora~~

e anche le banalizzazioni

$$\tau_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$$

sono diffeo $C^\infty$, dico che è un fibrato differenziabile.

<u>Esercizio</u>: $p$ è una sommersione.

---

## FIBRATO TANGENTE

$M^n$ = varietà $C^\infty$ $\qquad T_pM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$.

<u>Teorema</u> $TM$ è una varietà differenziabile

Sia $\quad \pi : TM \longrightarrow M \qquad \pi(T_pM) = p$.

Costruiamo un atlante su $TM$ per applicare il lemma di costruzione.

Sia $\quad (U, \varphi = (x^1 \ldots x^n))$ una carta su $M$.

$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_pM$. Definiamo una mappa

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

nel modo seguente:

se $v \in \pi^{-1}(U)$ sia $p = \pi(v)$.

Dunque $v \in T_pM$. Sappiamo che i vettori $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p$ — $\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ sono una base di $T_pM$. Dunque esistono degli scalari ~~unici~~ ben definiti $\xi^1$ — $\xi^n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Allora poniamo

$$\tilde{\varphi}(v) := \left( \varphi(\pi(v)), \begin{pmatrix} \xi^1 \\ | \\ \xi^n \end{pmatrix} \right) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n.$$

$$= (\varphi(p), \xi)$$

dove $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ | \\ \xi^n \end{pmatrix}$

$\tilde{\varphi}$ e' ~~evid~~ evidentemente biunivoca. Inoltre sulle fibre e' un isomorfismo.

Vogliamo applicare il lemma di costruzione.

$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ è aperto in $\mathbb{R}^{2n}$.

Se prendo due carte su $M$

$(U,\varphi)$ $(V,\psi)$ ho due casi

$U \cap V = \emptyset \Rightarrow \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$

oppure $U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$

$= \pi^{-1}(U \cap V)$

allora

$$\begin{tikzcd}
& \pi^{-1}(U \cap V) \arrow[dl, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\tilde{\psi}"] & \\
(U \cap V) \times \mathbb{R}^n & & (U \cap V) \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$\cancel{\tilde{\varphi}\,\tilde{\psi}^{-1}((U \cap V) \times \mathbb{R}^n)} =$

$$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\pi^{-1}(U \cap V)) =$$

$= (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ ← che è aperto in $\mathbb{R}^{2n}$.

Se scelgo un atlante numerabile di $M$

$\mathfrak{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ ~~il corrispondente~~

ho $TM = \bigcup_i \pi^{-1}(U_i)$.

Date due carte $(U,\varphi)$ e $(V,\psi)$ su $M$ 12

devo provare che

$$\tilde{\psi}\,\tilde{\varphi}^{-1} : U\cap V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U\cap V \times \mathbb{R}^n$$

e' un diffeo.

Sia $v \in \pi^{-1}(U\cap V)$ $\qquad p = \pi(v)$

$$v = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$$

Sia $y = h(x)$ ossia $\psi = h\circ\varphi$

ossia $h = \psi\varphi^{-1}$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x^j}(\varphi(p))\,\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p .$$

La matrice del cambiamento di base da

$\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ è $Jh(\varphi(p))$.

$$\Rightarrow \qquad \eta = Jh(\varphi(p))\cdot\xi = Jh(x)\cdot\xi$$

Quindi $\hat{\psi}\,\hat{\varphi}^{-1}$ e' un diffeomorfismo $C^\infty$.

Infine se $v_1, v_2 \in TM$ $\quad v_1 \neq v_2$.

abbiamo due casi:

$\pi(v_1) = \pi(v_2) = p \quad \Rightarrow$ appartengono alla medesima carta $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ dove $p \in U$.

Se invece $\pi(v_1) = p \neq q = \pi(v_2)$ posso scegliere su $M$ due carte $(U, \varphi)$ $(V, \psi)$ con $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

---

<u>Osservazioni ulteriori</u>:

$\pi : TM \longrightarrow M$ è $C^\infty$

Infatti sia $(U, \varphi)$ una carta. Allora

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \end{array}$$

$$\varphi \, \pi \, \tilde{\varphi}^{-1} (x, \xi) = x$$

Infatti sia $\tilde{\varphi}^{-1}(x, \xi) = v$

allora $x = \varphi(p)$

$\pi(v) = p \qquad \varphi \, \pi(v) = \varphi(p) = x.$

- Le fibre sono sottov. regolari chiuse. diffeo a $\mathbb{R}^n$.

<u>Teorema</u> $\pi : TM \longrightarrow M$

e' un fibrato vettoriale $C^\infty$ di rango $n$

<u>dim</u> Sappiamo che $TM$ e' una varietà e che $\pi$ e' $C^\infty$. ~~Sappi~~ Le fibre di $\pi$ sono $\pi^{-1}(p) = T_pM$ e quindi hanno una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione $n$. Dobbiamo mostrare che ci sono le banalizzazioni locali.

Sia $(U, \varphi)$ una carta su $M$.

Definiamo $\tau : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ mediante la ricetta

$$\tau(v) = \left( \pi(v), \ \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \right)$$

se $v = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$

In sostanza la differenza fra $\tau$ e $\tilde{\varphi}$ e' solo nella prima variabile dove non uso l'omeomorfismo $\varphi$:

$$\tau(v) = (\pi(v), \xi)$$

$$\tilde{\varphi}(v) = (\varphi\pi(v), \xi).$$

$\tau$ è un omeomorfismo $\qquad pr_1 \tau(v) = \pi(v)$.

Inoltre
$$\begin{array}{ccccc} T_pM & \xrightarrow{\tau} & \{p\}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & & \longmapsto & & \xi \end{array}$$

è chiaramente l'isomorfismo lineare indotto dalla base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}$.

---

Le sezioni (differenziabili) di un fibrato vettoriale ~~$E \to B$~~ $\quad E \xrightarrow[\pi]{} M$

le indichiamo con $\Gamma(E)$.

$\Gamma(E)$ è uno spazio vettoriale su $k$

e anche un $C^\infty$-modulo.

---

$\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM) = \{$campi vettoriali $C^\infty\}$

Cosa ci rappresentano i campi vettoriali?

Lemma

Sia $f: M \to N$ $C^\infty$

$\Rightarrow$ $df: TM \to TN$ è $C^\infty$

$$df(v) = df_{\pi(v)}(v).$$

dim Siano $(U,\varphi)$ $(V,\psi)$ $f(U) \subset V$

$$df(\pi^{-1}(U)) \subset \pi^{-1}(V)$$

$$p \in U \Rightarrow df_p(T_pM) \subseteq T_{f(p)}N.$$

$$\tilde{\psi}\, df\, \tilde{\varphi}^{-1}(x, \xi) = \tilde{\psi}\, df\left(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)$$

$$= \tilde{\psi}\left(\sum_j \xi^j\, df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)\right)$$

$$= \tilde{\psi}\left(\sum_{i,j} \xi^j \frac{\partial \bar{f}^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)}\right)$$

$$= \left(\psi f(p),\ J\bar{f}(\varphi(p)) \cdot \xi\right)$$

$$= \left(\bar{f}(x),\ J\bar{f}(x) \cdot \xi\right)$$

///