Esercizio 1. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ (cicloide).

1. Calcolare il vettore tangente e determinare i t in $\mathbb{R}$ tali che α è regolare in t.
2. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $\alpha(0, 2\pi)$.
3. Calcolare l'ascissa curvilinea come funzione di t.

Fatto a lezione.

Esercizio 2. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ (catenaria).

1. Calcolare il vettore tangente e determinare i t in $\mathbb{R}$ tali che α è regolare in t.
2. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $\alpha([0, 1])$.
3. Calcolare l'ascissa curvilinea come funzione di t.

Fatto a lezione.

Esercizio 3. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata (elica)

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

dove $a^2 + b^2 = c^2$, $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

1. Dimostrare che α é regolare in ogni $s \in \mathbb{R}$ e calcolare la curvatura di α.
2. Dimostrare che α é biregolare e calcolare il triedro di Frenet in ogni punto.
3. Calcolare la torsione di α.

Fatto a lezione.

Esercizio 4. Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \alpha(t) = \Big(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\Big).$$

1. Dimostrare che α è biregolare.
2. Determinare esplicitamente una riparametrizzazione per lunghezza d'arco di α.
3. Calcolare la curvatura di α.
4. Calcolare il triedro di Frenet in $t = \frac{\pi}{2}$.

Fatto a lezione.

Esercizio 5. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizzata per lunghezza d'arco. Dimostrare che

$$k(s) = \lim_{h\to 0} \frac{|(\alpha(s+h)-\alpha(s)) \wedge (\alpha(s-h)-\alpha(s))|}{h^3}.$$

Esercizio 6. Si consideri l'insieme

$$X = \{(p,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid p \wedge v = 0, |v| = 1\},$$

su cui é definita la relazione di equivalenza

$$(p,v) \sim (p',v') \iff p = p', v = \pm v'.$$

1. Si dimostri che l'applicazione che associa a (p,v) il piano $p + v^\perp$ soddisfa

$$p + v^\perp = p' + (v')^\perp \iff (p,v) \sim (p',v').$$

2. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, s un punto di I con $(s-k, s+k) \subset I$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq |k|$, sia π_h il piano passante per $\alpha(s)$, $\alpha(s+h)$ e $\alpha(s-h)$. Si definisca un'applicazione continua

$$x\colon (s-k, s+k) \to X$$

tale che $x(s+h)$ rappresenti il piano π_h.

3. Per definizione il *piano osculatore* in $s \in I$ é il piano affine

$$\alpha(s) + b(s)^\perp.$$

Dimostrare che il piano osculatore é il limite dei piani π_h per $h \to 0$, nel senso che $\lim_{h\to 0} x(s+h)$ rappresenta il piano osculatore.

Esercizio 7. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, s un punto di I, e sia $H > 0$ tale che per ogni $0 < h < H$, i punti $\alpha(s+h)$, $\alpha(s-h)$ e $\alpha(s)$ non siano allineati. Per ogni $0 < h < H$, sia c_h il centro della circonferenza C_h passante per $\alpha(s)$, $\alpha(s+h)$ e $\alpha(s-h)$. Il *cerchio osculatore* in s è l'intersezione del piano osculatore in s con la sfera di centro

$$c_0 = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} n(s)$$

e raggio $\frac{1}{k(s)}$. Dimostrare che il cerchio osculatore è il limite delle circonferenze C_h, nel senso che

$$c_h \to c_0.$$

Esercizio 8. Sia I un intervallo reale contenente zero, e $\alpha\colon I \to R^3$ una curva parametrizzata biregolare. Dimostrare che se $\tau = 0$, α é una curva piana (cioé $\alpha(I)$ é contenuto in un piano).

Esercizio 9. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

1. Dimostrare che α è una curva regolare.
2. Dire per quali t si ha $k(t) = 0$. Nel complementare, calcolare τ.
3. Dimostrare che α non é una curva piana.

Esercizio 10. Sia I un intervallo reale contenente zero, e $\alpha\colon I \to R^3$ una curva parametrizzata biregolare. Dimostrare che

1. se k e τ sono costanti, allora α é un'elica;
2. se k é costante e $\tau = 0$, allora α é una circonferenza di raggio $\frac{1}{k}$.

Esercizio 11. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata data da

$$\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)\ .$$

1. Dimostrare che α è biregolare.
2. Calcolare la lunghezza del segmento di curva contenuto tra $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$.
3. Calcolare il triedro di Frenet per ogni t.
4. Calcolare curvatura e torsione di α in 0.

Esercizio 12. Sia I un intervallo reale e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare, non necessariamente parametrizzata per lunghezza d'arco. Dimostrare che

- α é biregolare in t se e solo se $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \neq 0$
- se α é biregolare,

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}, \quad k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\alpha'''(t) \cdot (\alpha'(t) \wedge \alpha''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

Esercizio 13. Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3).$$

1. Dimostrare che α é biregolare.
2. Calcolare curvatura e torsione di α.
3. Calcolare il riferimento di Frenet.

Esercizio 14. Trovare una curva regolare $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che

- $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha''(t) \neq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$;
- α non é biregolare (neanche se mi restringo a $I \subset \mathbb{R}$)

Esercizio 15. Sia I un intervallo reale contenente 0, e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare parametrizzata per lunghezza d'arco. Siano $t, n\colon I \to \mathbb{R}^2$, $k\colon I \to \mathbb{R}$ funzioni tali che per ogni s in I

- $t(s) = \alpha'(s)$;
- $(t(s), n(s))$ sia una base ortonormale orientata di $\mathbb{R}^2$;
- $k(s)n(s) = \alpha''(s)$.

Dimostrare che

1. le funzioni t, n, k sono C^∞;
2. t é una curva C^∞ a valori in $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, regolare se e solo se α é biregolare;
3. per ogni s_0 in I esiste $\epsilon > 0$ e una funzione C^∞ $\theta\colon (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}$ tale che
$$t(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s));$$
4. θ come sopra soddisfa
$$\frac{d\theta}{ds} = k(s);$$
5. definendo $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ mediante
$$\theta(s) = \int_0^s k(s)ds + \theta_0,$$
dove $(\cos\theta_0, \sin\theta_0) = t(0)$, allora
$$t(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$
su tutto I.

Esercizio 16. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Sia π la proiezione ortogonale da $\mathbb{R}^3$ al piano osculatore in $t_0 \in I$, e sia $\beta = \pi \circ \alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$. Dimostrare che α e β hanno la stessa curvatura in t_0.

Esercizio 17. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco, tale che $\tau(s) \neq 0$ e $k'(s) \neq 0$ per ogni s. Posto $R = 1/k$, $T = 1/\tau$, dimostrare che $\alpha(I)$ é contenuto in una sfera se e solo se

$$R^2 + (R')^2T^2 \text{ è costante.} \tag{1}$$

Esercizio 18. Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana data in coordinate polari dalle equazioni $r = \rho(\phi)$, cioè

$$\sigma(\phi) = (\rho(\phi)\cos\phi, \rho(\phi)\sin\phi)$$

per un'opportuna funzione $\rho\colon I \to \mathbb{R}^+$. Dimostrare che

1. La lunghezza d'arco di σ é data da

$$s(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\phi$$

2. La curvatura orientata di σ é data da

$$k = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}$$

Esercizio 19. Sia

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x-a)(x-b)\}.$$

Dimostrare che C é una curva regolare se e solo se $a \neq b$ e $a, b \neq 0$.

Esercizio 20. Costruire una funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che 0 non sia un valore regolare di f ma $f^{-1}(0)$ sia una curva regolare.

Esercizio 21. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con 0 valore regolare, $C = f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Esiste una funzione $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $g^{-1}(0) = C$, ma 0 non é un valore regolare di g?

Esercizio 22. Dati due numeri reali positivi a e b, sia

$$S_{a,b} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + z^2 = 1\}.$$

- Dimostrare che $S_{a,b}$ è una superficie regolare per ogni valore di a e b.
- Dimostrare che $S_{a,b}$ è diffeomorfo a $S_{a',b'}$ per ogni scelta di a, b, a', b'.

Fatto a lezione.

Esercizio 23. Si indichi con S^2 la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,$$

e con N il polo nord $(0, 0, 2) \in S^2$; si identifichi inoltre $\mathbb{R}^2$ con il piano $\{z = 0\}$. Sia $\pi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ l'unica mappa tale che $N, x, \pi(x)$ sono allineati per ogni x in S^2 (proiezione stereografica).

- Dimostrare che l'inversa di π è data da

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}, \quad \phi(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 4}(4u, 4v, 2(u^2 + v^2)).$$

- Dimostrare che ϕ è una parametrizzazione.

Fatto a lezione.

Esercizio 24. Sia S la superficie $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0\}$. Dimostrare che S non è una superficie regolare.
Fatto a lezione.

Esercizio 25. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞; sia $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in A \times \mathbb{R} \mid z = f(x, y).\}$. Allora Γ_f è una superficie regolare e ammette un atlante che contiene una sola parametrizzazione. Inoltre Γ_f è diffeomorfa a $\Gamma_0 = A \times \{0\}$.
Fatto a lezione.

Esercizio 26. Sia $C \subset \mathbb{R}^2$; si dice che C è una *curva regolare* se per ogni p in C esiste un aperto $p \in V \subset \mathbb{R}^2$, un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e un'applicazione C^∞ $\phi\colon I \to \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(I) = V \cap C$ e $\phi\colon I \to V \cap C$ è un omeomorfismo, con $\phi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ [in particolare, ϕ è una curva parametrizzata regolare]. Dimostrare che se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è C^∞, con 0 valore regolare, allora $f^{-1}(0)$ è una curva regolare.

Esercizio 27. Sia $\sigma(t) = ((2\cos t - 1)\cos t, (2\cos t - 1)\sin t)$. Dimostrare che σ é una curva parametrizzata regolare, ma $C = \sigma(\mathbb{R})$ non è una curva regolare.
Fatto a lezione.

Esercizio 28. Sia $\alpha\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$. Dimostrare che α é una curva parametrizzata regolare iniettiva, ma $\alpha(\mathbb{R})$ non é una curva regolare.
Fatto a lezione.

Esercizio 29. Sia $F\colon \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ la mappa

$$F(u, v) = \left(\left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)\cos u, \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)\sin u, v\sin\frac{u}{2}\right),$$

e sia $X = F(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ la sua immagine (nastro di Möbius).

- Dimostrare che $F\colon \mathbb{R} \times (-1, 1) \to X$ è un omeomorfismo locale.
- Dimostrare che le restrizioni di F a $(0, 2\pi) \times (-1, 1)$ e $(-\pi, \pi) \times (-1, 1)$ sono parametrizzazioni, e quindi X è una superficie regolare.
- Dimostrare che X non è orientabile.

Fatto a lezione.

Esercizio 30. Siano a, r parametri reali, $0 < r < a$, e sia T la superficie ottenuta ruotando la circonferenza

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, (y - a)^2 + z^2 = r^2\}$$

intorno all'asse z.

- Scrivere l'equazione di T.
- Dimostrare che T é una superficie regolare.

Fatto a lezione.

Esercizio 31. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata la cui immagine sia una curva regolare contenuta in $\{x = 0, y > 0\}$. Dimostrare che la superficie S ottenuta ruotando $\alpha(I)$ intorno all'asse z é regolare e diffeomorfa al cilindro.

Esercizio 32. Sia f la funzione sulla sfera S^2 data da $f(x, y, z) = z$. Determinare i punti critici di f.
Fatto a lezione.

Esercizio 33. Sia T la superficie regolare

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 1 = 0\right\}$$

e si consideri la funzione

$$f\colon T \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = y.$$

Determinare i punti critici di f.
Fatto a lezione.

Esercizio 34. Sia C una curva regolare in $\mathbb{R}^3$ contenuta nel semipiano

$$\{x = 0, y > 0\},$$

e sia S la superficie ottenuta ruotando C intorno all'asse z. Dimostrare che S é una superficie regolare.
Fatto a lezione.

Esercizio 35. Calcolare la curvatura della superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}.$$

Fatto a lezione.

Esercizio 36. Sia $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$ una curva regolare, con $f(t) > 0$, e sia S la superficie di rivoluzione ottenuta ruotando $\alpha(\mathbb{R})$ intorno all'asse z.

- Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S.
- Dimostrare che il punto $(0, f(t), g(t))$ è planare se e solo se $g'(t) = g''(t) = 0$.
- Dimostrare che se α é parametrizzata per lunghezza d'arco la curvatura di S in $(0, f(t), g(t))$ è $-\frac{f''(t)}{f(t)}$.
- Dimostrare che le curvature principali (e quindi la curvatura gaussiana) di S nei punti del parallelo contenente $\alpha(t)$ dipendono solo da t.

Fatto a lezione.

Esercizio 37. Sia T il toro ottenuto ruotando la circonferenza

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, (y - a)^2 + z^2 = r^2\}$$

intorno all'asse z, dove $a > r > 0$.

- Calcolare la curvatura di T.
- Determinare punti ellittici, parabolici, iperbolici, e planari.

Fatto a lezione.

Esercizio 38. Sia $\phi\colon \mathbb{R} \times (0, 1) \to \mathbb{R}^3$ la mappa

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

- Dimostrare che $S = \phi(\mathbb{R} \times (0, 1))$ é una superficie e ϕ è una parametrizzazione globale di S.
- Usando l'orientazione indotta dalla parametrizzazione ϕ, calcolare le curvature principali e la curvatura gaussiana di S.

Fatto a lezione.

Esercizio 39 [compito vecchio]. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞, e sia $S = \Gamma_f = \{z = f(x, y)\}$ il grafico. Dimostrare che se tutti i punti di S sono iperbolici, allora f non ha minimo.
Fatto a lezione.

Esercizio 40 [compito vecchio]. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata e sia N un campo normale unitario. Sia $p \in S$ un punto tale che $N(p) = (0, 0, 1)$ e sia $U \subset S$ un intorno aperto di p tale che $\langle N(q), (0, 1, 0\rangle \leq 0$ per ogni $q \in U$.

- Dimostrare che l'applicazione di Gauss non è un diffeomorfismo locale in p.
- Dimostrare che $K(p) = 0$.

Fatto a lezione.

Esercizio 41. Sia $\alpha\colon (\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (0, \sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$$

e sia S la superficie di rivoluzione ottenuta ruotando $\alpha((\frac{\pi}{2}, \pi))$ intorno all'asse z. Dimostrare che S (detta pseudosfera) è una superficie regolare e calcolarne le curvature media e gaussiana.
Fatto a lezione.

Esercizio 42 [compito vecchio]. Poniamo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{2y} = xz\}.$$

Definiamo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mediante la formula

$$\phi(u, v) = \left(e^u, \frac{1}{2}(u + v), e^v\right).$$

1. Dimostrare che S è una superficie regolare orientabile.
2. Dimostrare che ϕ è una parametrizzazione di S e caratterizzare i punti di S che stanno nell'immagine di ϕ.
3. Calcolare la seconda forma fondamentale e la curvatura Gaussiana in ogni punto di $\phi(\mathbb{R}^2)$.
4. Calcolare le curvature principali di S nel punto $(1, 0, 2)$.

Esercizio 43. Sia S una superficie compatta. Allora S ha almeno un punto ellittico.
Fatto a lezione.

Esercizio 44. Sia S una superficie regolare, e $\alpha\colon I \to S$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco. Supponiamo che il punto $p = \alpha(0)$ sia ellittico. Dimostrare che α è biregolare in 0.
Fatto a lezione.

Esercizio 45 [compito vecchio]. Poniamo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x + z)^2 + y^2 = 2\}$$
$$\Omega = (-\pi, \pi) \times (-1, 1).$$

Definiamo $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mediante la formula

$$\phi(u, v) = \left(\cos u + 2u + v, \sqrt{2}\sin u, \cos u - 2u - v\right).$$

1. Dimostrare che S è una superficie regolare orientata.
2. Dimostrare che ϕ è una parametrizzazione di S.
3. Calcolare la seconda forma fondamentale e la curvatura Gaussiana in ogni punto di $\phi(\Omega)$.
4. Calcolare le curvature principali in ogni punto di $\phi(\Omega)$.
5. Dire se S è isometrica a una sfera, o a qualche aperto di una sfera, o a un cilindro.
6. Dire se $\phi\colon \Omega \to \phi(\Omega)$ è una isometria.

Svolgimento: Osserviamo che posto $F(x,y,z) = 2(x+z)^2 + y^2 - 2$, si ha $S = F^{-1}(0)$ e
$$JF = \begin{pmatrix} 4x+4z & 2y & 4x+4z \end{pmatrix}.$$
Dunque l'unico valore critico è -2 e quindi 0 è un valore regolare. Segue che S è una superficie regolare orientata, per il teorema della funzione implicita e perchè $\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F$ è un campo normale.

Osserviamo che ϕ è iniettiva, C^∞, e vale
$$\begin{aligned} \phi_u &= \left(2 - \sin(u), \cos(u)\sqrt{2}, -2 - \sin(u)\right) \\ \phi_v &= (1, 0, -1) \end{aligned}$$
Dunque ϕ_u e ϕ_v sono linearmente indipendenti in ogni punto, e quindi (poichè sappiamo già che S è una superficie regolare) segue che ϕ è una parametrizzazione.

Calcoliamo
$$\begin{aligned} N &= \left(-\frac{1}{2}\cos(u)\sqrt{2}, -\sin(u), -\frac{1}{2}\cos(u)\sqrt{2}\right) \\ \phi_{uu} &= \left(-\cos(u), -\sqrt{2}\sin(u), -\cos(u)\right) \\ \phi_{uv} &= (0,0,0) \\ \phi_{vv} &= (0,0,0) \end{aligned}$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque
$$W_{ij} = \frac{1}{\det g}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice è triangolare, quindi gli autovalori sono i valori sulla diagonale:
$$k_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad k_2 = 0.$$
La curvatura è $K = k_1 k_2 = 0$.

S non è isometrica alla sfera perchè la sfera è compatta, mentre S non è limitata. Infatti S contiene la successione di punti $p_n = (n+1, 0, -n)$, e
$$\lim_{n\to\infty} |p_n|^2 = \lim 2n^2 + 2n + 1 = +\infty.$$

S non è neanche isometrica a un aperto $A \subset S^2_r$ della sfera di raggio r. Infatti se esistesse una isometria $f\colon S \to A \subset S^2_r$, per il Teorema Egregium allora $K_{S^2_r} \circ f = K_S$, quindi dovrebbe essere $0 \equiv K_S \equiv \frac{1}{r^2}$ che è assurdo.

Per dimostrare che S è isometrica a un cilindro, osserviamo che l'isometria di $\mathbb{R}^3$,
$$A(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z, y, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

manda S in

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 = 2\}.$$

Dunque è sufficiente dimostrare che Q è isometrica al cilindro

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

per qualche $r \in \mathbb{R}$.

Sia

$$\tilde{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 2\}, \quad \tilde{C}_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

Iniziamo col costruire un diffeomorfismo $h\colon \tilde{C}_r \to \tilde{Q}$ tale che dh preservi la lunghezza dei vettori, cioè

$$|dh_p(v)| = |v|\,, \quad v \in T_p\tilde{C}_r. \tag{2}$$

Per fare ciò, consideriamo le curve parametrizzate regolari

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \tilde{C}_r, \quad \alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

$$\beta\colon \mathbb{R} \to \tilde{Q}, \quad \beta(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$$

e definiamo γ come la riparametrizzazione di β per ascissa curvilinea. Poichè β è periodica, anche γ è periodica; possiamo scegliere r in modo che il periodo di γ sia $2\pi r$. Definiamo poi h in modo che

$$h(\alpha(t)) = \gamma(rt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La definizione non dipende dalla scelta di t perchè α e γ sono periodiche. Inoltre h è C^∞ perchè $h\circ\alpha$ è C^∞, e le restrizioni di γ a intervalli della forma $(t_0, t_0{+}2\pi r)$ definiscono un atlante di $\tilde{C}_r$. Infine,

$$dh(\alpha'(t)) = r\gamma'(rt),$$

dove $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ è un generatore di $T_p\tilde{C}_r$ di lunghezza r; quindi (2) è soddisfatta. In particolare dh è iniettivo, quindi h (essendo biunivoca e C^∞) è un diffeomorfismo.

Adesso poniamo

$$f\colon C_r \to Q, \quad f(x, y, z) = (h(x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}.$$

Poichè h è un diffeomorfismo, ne discende che f è un diffeomorfismo. Verifichiamo che è un'isometria. Sia $p = (x, y, z)$ un punto di C_r. Allora una base ortonormale di T_pC_r è data da

$$e_1 = \frac{1}{r}(-y, x, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1).$$

Le immagini di e_1 e e_2 sono

$$df_p(e_1) = (dh_{(x,y)}(e_1), 0) \in \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}.$$

$$df_p(e_2) = (0, 0, 1)$$

che sono vettori ortonormali. Quindi df_p manda una base ortonormale in una base ortonormale, e quindi f è un'isometria.

La parametrizzazione ϕ non è un'isometria: se lo fosse allora varrebbe, per definizione, che detta e_1, e_2 la base standard di $\mathbb{R}^2$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle d\phi_p(e_i), d\phi_p(e_j) \rangle = \langle \phi_{u_i}, \phi_{u_j} \rangle = g_{ij},$$

cioè g dovrebbe essere la matrice identica in ogni punto, che è falso.

Esercizio 46 [compito vecchio]. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞, e sia $S = \Gamma_f = \{z = f(x, y)\}$ il grafico. Dimostrare che se (x, y) è un punto di minimo per f, allora i simboli di Christoffel relativi alla parametrizzazione globale $\phi: \mathbb{R}^2 \to S$,

$$\phi(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

si annullano in $(0, 0)$.
Fatto a lezione.

Esercizio 47. Sia S una superficie regolare connessa. Si dice che un punto $p \in S$ è *ombelicale* se le curvature principali di S sono uguali in p. Dimostrare che se tutti i punti di S sono ombelicali, allora S è contenuta in un piano o in una sfera. In particolare, se tutti i punti di S sono planari, S è contenuta in un piano.