

Esercizi di Topologia

(1)

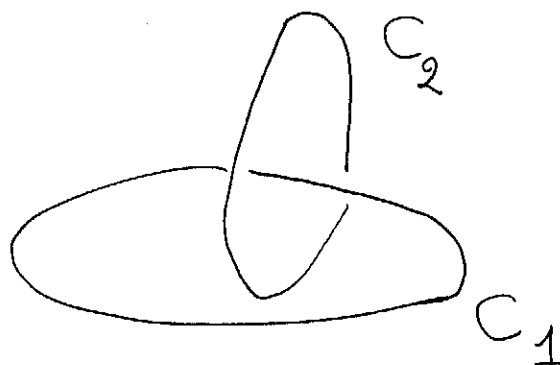
a) Sia $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z=0, x^2+y^2=1\}$

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, (x+1)^2 + z^2 = 1\}$$

Calcolare

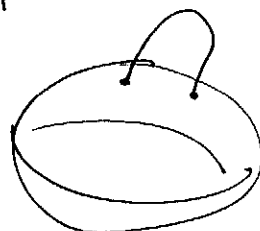
$$\pi_1(X)$$

dove $X = \mathbb{R}^3 - C_1 \cup C_2$



Sugg. provare direttamente
con Seifert e van Kampen

b) Sia X lo spazio ~~lo~~
cioè una sfera S^2 con
attaccato un manico.



Calcolare $\pi_1(X)$.

Sugg. usare Seifert
e van Kampen.

(c) Dimostrare che ogni applicazione
 continua $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow S^1$
 è omotopa ad una costante.
Sugg.: è uguale all'esercizio fatto oggi.

(d) Dimostrare che ogni applicazione
 $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^1$ è $\simeq$ costante.
Suggerimento: questo è più complicato
 ma si fa nello stesso modo.
 Dimostrare che anche in questo
 caso possiamo sollevare. Bisogna
 ragionare sulle proprietà dei gruppi!

(e) Sia $C_3 = \{ \text{~~non~~ } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-4)^2 + y^2 = 1, z=0 \}$

Dimostrare che

$\mathbb{R}^3 - C_1 \cup C_3$ non è omeomorfo

a $\mathbb{R}^3 - C_1 \cup C_2$

(C_1, C_2
 come in
 (a)!

Sugg. calcolando

$\pi_1(\mathbb{R}^3 - C_1 \cup C_3)$.

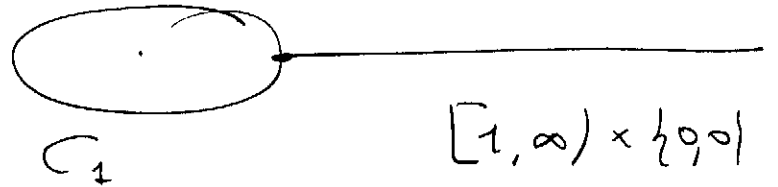
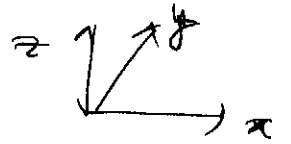
(3)

(f)

Sie

~~8.1.17~~

$$X := \mathbb{R}^3 - C_1 \cup ([1, \infty) \times \{0, 0\})$$

Calcolare $\pi_1(X)$ 

(g)

Sie

$$X = S^2 \cup \{i \text{ 3 piani coordinati}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\pi_1(X) = ?$$

→ Maetti es. 11.17

Suggerimento:

cominciare da

$$X_1 = S^2 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z=0\}$$

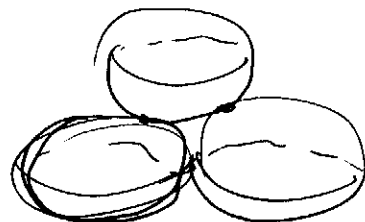
(h)

Sie

$X =$ unione di 3 sfere
a due a due
tangenti

Calcolare

$$\pi_1(X).$$



①

Sie $X = \text{sp. localmente annesso per archi} + \text{connesso.}$

④

Siano E_1 ed E_2 due spazi
e $p_i: E_i \rightarrow X$ due rivestimenti.

Sia $\pi_1(E_1) = \{1\}$

$\exists$ e siano $x \in X$ $e_1 \in p_1^{-1}(x)$
 $e_2 \in p_2^{-1}(x)$

Allora $\exists!$ $f: E_1 \rightarrow E_2$ t.c.

$f(e_1) = e_2$ e f è un morfismo
di rivestimenti, ossia

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array} \quad \text{commuta}$$

①

Sie ~~$X = S^2 \cup D$~~

$$D := \{(0,0)\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$$

Calcolare

$$\pi_1(X)$$

con

$$X = S^2 \cup D.$$

