Teorema di escissione per l'omologia singolare.

Alessandro Ghigi

17 novembre 2015

Sia X uno spazio topologico e $\mathfrak{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che $\{\mathring{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sia un ricoprimento aperto di X. Un p-simplesso singolare $\sigma : \Delta_p \to X$ è *piccolo* se $\sigma(\Delta_p) \subset U_\alpha$ per qualche $\alpha \in I$. Sia $C_p(\mathfrak{A}) \subset C_p(X)$ il sottogruppo generato dai simplessi piccoli. Si verifica immediatamente che $\partial C_p(\mathfrak{A}) \subset C_{p-1}(\mathfrak{A})$. Dunque $C_*(\mathfrak{A})$ è un sottocomplesso di $C_*(X)$. Sia $i : C_*(\mathfrak{A}) \hookrightarrow C_*(X)$ l'inclusione.

Teorema 1. *Il morfismo indotto $i_* : H_p(C_*(\mathfrak{A})) \longrightarrow H_p(C_*(X)) = H_p(X)$ è un isomorfismo per ogni p.*

In realtà dimostriamo il risultato analogo per l'omologia ridotta. Poniamo

$$\widetilde{C}_p(X) := C_p(X) \text{ per } p \neq -1, \quad \widetilde{C}_{-1}(X) := \mathbb{Z}.$$

L'operatore di bordo $\partial_p : \widetilde{C}_p(X) \to \widetilde{C}_{p-1}(X)$ è quello solito per $p \neq 0$ e $\partial_{-1} = \varepsilon$. Otteniamo così un complesso $\widetilde{C}_*(X)$, che ha come homologia l'omologia ridotta e che viene chiamato *complesso aumentato*. Possiamo fare la stessa costruzione per $C_*(\mathfrak{A})$: questo complesso differisce da $C_*(\mathfrak{A})$ solo in questo: $\widetilde{C}_{-1}(\mathfrak{A}) := \mathbb{Z}$ e $\partial_0 = \varepsilon$. Dimostreremo che l'inclusione $i :: \widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) \hookrightarrow \widetilde{C}_*(X)$ induce isomorfismi $i_* : H_p(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})) \longrightarrow H_p(\widetilde{C}_*(X)) = \tilde{H}_p(X)$ per ogni p. Questo fatto è equivalente al teorema 1.

Sia $Y \subset \mathbb{R}^k$ un sottoinsieme convesso. Definiamo un sottocomplesso $A_*(Y) \subset \widetilde{C}_*(Y)$ ponendo $A_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ e $A_p(Y) := \{p\text{-simplessi affini in } Y\}$ per $p \geq 0$. Dato un punto $y \in Y$ definiamo un operatore $y : A_p(Y) \to A_{p+1}(Y)$: su $A_{-1}(Y)$ poniamo $y(1) := [y]$, per $p \geq 0$ $y([v_0, \ldots, v_p]) := [y, v_0, \ldots, v_p]$.

Lemma 2. *y è un operatore di omotopia fra l'identità e il morfismo nullo: $y\partial + \partial y = id_{A_*}$.*

Dimostrazione. Per $p = 0$

$$(\partial y + y\partial)[v_0] = y(1) + \partial[yv_0] = [y] + [v_0] - [y] = [v_0].$$

Per $p \geq 1$

$$(\partial y + y\partial)[v_0, \ldots, v_p] = \partial[y, v_0, \ldots, v_p] + y\Big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_p]\Big) =$$

$$= [v_0, \ldots, v_p] + \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}[y, v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_p] + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[y, v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_p] =$$

$$= [v_0, \ldots, v_p].$$

□

Dato un p-simplesso *affine* $\sigma := [v_0, \ldots, v_p]$ poniamo

$$b_\sigma := \frac{v_0 + \cdots v_p}{p+1}.$$

b_σ è il *baricentro* di σ. Se $p = 0$ e $\sigma = [v_0]$, allora $b_\sigma = v_0$.

Definiamo un operatore $S_p : A_p(Y) \to A_p(Y)$. Per $p = -1$ poniamo $S_{-1} := \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Poi definiamo per ricorrenza S_p nel modo seguente: se $\sigma \in A_p(Y)$, allora

$$S_p\sigma := b_\sigma(S_{p-1}\partial\sigma).$$

Osserviamo che $S_0 = \mathrm{id}_{A_0(Y)}$. Si può verificare qualche esempio per p piccolo:

$$S_1([v_0, v_1]) = [b, v_1] - [b, v_0], \qquad \text{dove } b = \frac{v_0 + v_1}{2},$$
$$S_2(v_0, v_1, v_2]) = [b, b_0, v_2] - [b, b_0, v_1] - [b, b_1, v_2] + [b, b_1 v_0] + [b, b_2, v_1] - [b, b_2, v_0],$$
$$\text{dove } b := \frac{v_0 + v_1 + v_2}{3}, b_0 := \frac{v_1 + v_2}{2}, b_1 := \frac{v_0 + v_2}{2}, b_2 := \frac{v_0 + v_2}{2}.$$

Lemma 3. *$S : A_*(Y) \to A_*(Y)$ è un morfismo di complessi.*

Dimostrazione. Siccome $S_{-1} = \mathrm{id}$ e $S_0 = \mathrm{id}$ si ha $S_{-1}\partial_0 = \partial_0 S_0$. Procediamo per induzione. Supponiamo che $S_{p-1}\partial_p = \partial_p S_p$ e verifichiamo che allora $S_p\partial_{p+1} = \partial_{p+1}S_{p+1}$. Infatti

$$\partial_{p+1}S_{p+1}\sigma = \partial_{p+1}b_\sigma(S_p\partial_{p+1}\sigma.$$

Dal lemma 2 segue che $\partial_{p+1}b_\sigma = -b_\sigma\partial_p + \mathrm{id}$. Dunque

$$\partial_{p+1}S_{p+1}\sigma = -b_\sigma\partial_p S_p\partial_{p+1}\sigma + S_p\partial_{p+1}\sigma.$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva

$$b_\sigma\partial_p S_p\partial_{p+1}\sigma = b_\sigma S_{p-1}\partial_p\partial_{p+1}\sigma = 0.$$

Quindi $\partial_{p+1}S_{p+1}\sigma = S_p\partial_{p+1}\sigma$. □

Ora definiamo un operatore $T_p : A_p(Y) \to A_{p+1}(Y)$ nel modo seguente: $T_{-1} \equiv 0$ e per ricorrenza $T_p\sigma := b_\sigma(\sigma - T_{p-1}\sigma)$ se σ è un p-simplesso affine in Y.

Lemma 4. *T è un operatore di omotopia fra $\mathrm{id}_{A_*(Y)}$ e S, ossia $\partial T + T\partial = \mathrm{id} - S$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\partial_{p+1}T_p + T_{p-1}\partial_p = \mathrm{id} - S_p$. Per $p = -1$ si vede subito che $\partial_0 T_{-1} + T_{-2}\partial_{-1} = 0$, come richiesto. Procediamo per induzione. Supponiamo che $\partial_{p+1}T_p + T_{p-1}\partial_p = \partial - S - p$. Sia $\sigma \in A_{p+1}(Y)$. Allora

$$(\partial_{p+2}T_{p+1} + T_p\partial_{p+1})\sigma = \partial_{p+2}T_{p+1}\sigma + T_p\partial_{p+1}\sigma =$$
$$= \partial b_\sigma(\sigma - T_p\partial\sigma) + T_p\partial\sigma.$$

Sappiamo dal lemma 2 che

$$\partial b_\sigma(\sigma - T_p\partial\sigma) = -b_\sigma\partial(\sigma - T_p\partial\sigma) + (\sigma - T_p\partial\sigma).$$

Dunque

$$(\partial_{p+2}T_{p+1} + T_p\partial_{p+1})\sigma = -b_\sigma\partial(\sigma - T_p\partial\sigma) + (\sigma - T_p\partial\sigma) + T_p\partial\sigma =$$
$$= -b_\sigma\partial\sigma + b_\sigma\partial T_p\partial\sigma + \sigma.$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi induttiva: $\partial T_p\partial\sigma = -T_{p-1}\partial^2\sigma + \partial\sigma - S_p\partial\sigma = \partial\sigma - S_p\partial\sigma$. Dunque

$$(\partial_{p+2}T_{p+1} + T_p\partial_{p+1})\sigma = \sigma - b_\sigma S_p\partial\sigma = \sigma - S_{p+1}\sigma.$$

□

Ora estendiamo gli operatori S e T a catene singolari in spazi topologici qualsiasi mediante la seguente definizione: se $\sigma \in \widetilde{C}_p(X)$

$$S(\sigma) := \sigma_\# \left(S\,\mathrm{id}_{\Delta_p}\right),$$
$$T(\sigma) := \sigma_\# \left(T\,\mathrm{id}_{\Delta_p}\right).$$

Questa definizione è *naturale* nel seguente senso: se $f : X \to Y$ è una applicazione continua e σ è un simplesso singolare in X, allora $f_\#(S\sigma) = S(f_\#\sigma)$ e analogamente per T.

Anche nel caso generale $S : \widetilde{C}_*(X) \to \widetilde{C}_*(X)$ è un morfismo di complessi e T è un operatore di omotopia fra $\mathrm{id}_{\widetilde{C}_*(X)}$ e S, per ogni spazio topologico X.

Fissato $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ indichiamo con S^m la composizione di S con sé stessa m volte. Poniamo

$$D_m := \sum_{i=0}^{m-1} TS^i.$$

Allora D_m è un operatore di omotopia fra $\mathrm{id}_{\widetilde{C}_*(X)}$ e S^m. Infatti siccome $\partial S = S\partial$

$$\partial D_m + D_m\partial = \sum_{i=0}^{m-1}(\partial T + T\partial)S^i = (\mathrm{id} - S)\sum_{i=0}^{m-1} = \mathrm{id} - S^m.$$

Per ogni m supponiamo che

$$S^m\,\mathrm{id}_{\Delta_p} = \sum_{j=1}^{k_m} a_j\tau_{mj}.$$

Dato un p-simplesso singolare $\sigma : \Delta_p \to X$ definiamo $m(\sigma)$ come il più piccolo m tale che per ogni $j = 1, \dots, k_m$ esista un $\alpha \in I$ tale che $\sigma\tau_{mj}(\Delta_p) \subset U_\alpha$. Sfruttando il lemma di Lebesgue si vede che esistono sempre degli m con questa proprietà. Inoltre si vede che per $i = 0, \dots, p$

$$m(\sigma \circ F_p^i) \leq m(\sigma).$$

Poniamo

$$D\sigma := D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Per costruzione $D\sigma \in \widetilde{C}_*(\mathfrak{A})$ dunque

$$D : \widetilde{C}_p(X) \longrightarrow \widetilde{C}_{p+1}(\mathfrak{A}).$$

Definiamo $\rho : \widetilde{C}_*(X) \to \widetilde{C}_*(X)$ imponendo che

$$\partial D + D\partial = \mathrm{id} - \rho. \tag{1}$$

Dunque se $\sigma \in \widetilde{C}_p(X)$

$$\rho(\sigma) := \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma. \tag{2}$$

Lemma 5. $\rho(\widetilde{C}_p(X)) \subset \widetilde{C}_P(\mathfrak{A})$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\rho(\sigma) &= \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D\partial\sigma = \\
&= \sigma - \big(\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma\big) + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma = \\
&= \sigma - (\mathrm{id} - S^{m(\sigma)})\sigma + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(D_{m(\sigma)} - D\big)(\sigma F_p^i) = \\
&= S^{m(\sigma)}\sigma + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(D_{m(\sigma)} - D\big)(\sigma F_p^i).
\end{aligned}$$

Per definizione di $m(\sigma)$, $S^{m(\sigma)}\sigma \in \widetilde{C}_P(\mathfrak{A})$. Inoltre $m(\sigma F_p^i) \leq m(\sigma)$

$$\big(D_{m(\sigma)} - D\big)(\sigma F_p^i) = \sum_{j=m(\sigma F_p^i)}^{m(\sigma)-1} TS^j(\sigma F_p^i).$$

Se $j > m(\sigma F_p^i)$, $S^j(\sigma F_p^i) \in \widetilde{C}_p(\mathfrak{A})$. Dunque $\big(D_{m(\sigma)} - D\big)(\sigma F_p^i) \in \widetilde{C}_p(\mathfrak{A})$. Quindi abbiamo dimostrato che $\rho(\sigma) \in \widetilde{C}_p(\mathfrak{A})$. $\square$

Lemma 6. $\rho : \widetilde{C}_*(X) \to \widetilde{C}_*(\mathfrak{A})$ *è un morfismo di complessi di gruppi abeliani.*

Dimostrazione. Usiamo (2):

$$\begin{aligned}
\partial\rho(\sigma) &= \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma, \\
\rho(\partial\sigma) &= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma.
\end{aligned}$$

$\square$

Dunque abbiamo due morfismi di complessi

$$\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) \xhookrightarrow{i} \widetilde{C}_*(X), \qquad \widetilde{C}_*(X) \xrightarrow{\rho} \widetilde{C}_*(\mathfrak{A}).$$

Se σ è un p-simplesso piccolo, allora $m(\sigma) = 0$, dunque $D\sigma = 0$. Pertanto $\rho i = \mathrm{id}_{\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})}$. Dunque

$$\rho_* i_* = (\rho i)_* = \mathrm{id} : H_p(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})) \to H_p(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})).$$

D'altro canto l'equazione (1) dice che $i\rho \simeq \mathrm{id}_{\widetilde{C}_*(X)}$. Quindi $\mathrm{id} = \mathrm{id}_* = (i\rho)_* = i_*\rho_* : H_p(X) \to H_p(X)$. Ciò significa che $\rho_* : H_p(X) \to H_p(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}))$ e $i_* : H_p(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})) \to H_p(X)$ sono l'una l'inversa dell'altra. In particolare i_* è un isomorfismo. Abbiamo concluso la dimostrazione del Teorema 1.

Teorema 7 (di escissione)**.** *Se $Z \subset A \subset X$ e $\overline{Z} \subset \mathring{Z}$, allora l'inclusione $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, Z)$ induce isomorfismi $H_p(X - Z, A - Z) \cong H_p(X, A)$ per ogni $p \geq 0$.*

Poniamo $\mathfrak{A} := \{A, B := X - Z\}$. Allora $\mathfrak{A}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 1. Inoltre $\widetilde{C}_*(A)$ è un sottocomplesso di $\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})$. Consideriamo le applicazioni i, ρ, D della formula (1). Tutte queste applicazioni mandano $\widetilde{C}_*(A)$ in sé stesso. Dunque passano al quoziente e producono applicazioni fra i complessi quoziente:

$$i : \widetilde{C}_p(\mathfrak{A}) \big/ \widetilde{C}_p(A) \longrightarrow \widetilde{C}_p(X) \big/ \widetilde{C}_p(A),$$
$$\rho : \widetilde{C}_p(X) \big/ \widetilde{C}_p(A) \longrightarrow \widetilde{C}_p(\mathfrak{A}) \big/ \widetilde{C}_p(A),$$
$$D : \widetilde{C}_p(X) \big/ \widetilde{C}_p(A) \longrightarrow \widetilde{C}_{p+1}(X) \big/ \widetilde{C}_{p+1}(A).$$

Queste applicazioni hanno ancora le stesse proprietà di quelle originali: i e ρ sono morfismi di complessi, $\rho i = \mathrm{id}$ e D è una omotopia: $\mathrm{id} - i\rho = \partial D + D\partial$. Dunque il morfismo indotto

$$i_* : H_p\Big(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) \big/ \widetilde{C}_*(A)\Big) \longrightarrow H_p\Big(\widetilde{C}_p(X) \big/ \widetilde{C}_p(A),\Big), \tag{3}$$

è un isomorfismo.

Lemma 8. *Il complesso quoziente $\widetilde{C}_*(X)/\widetilde{C}_*(A)$ coincide con il complesse delle catene relative della coppia (X, A).*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che il complesso aumentato $\widetilde{C}_*(X)$ differisce dal complesso delle catene singolari $C_*(X)$ solamente in grado -1, dove abbiamo aggiunto $\mathbb{Z}$. Siccome fra $\widetilde{C}_*(A)$ e $C_*(A)$ c'è la stessa differenza, quozientando questa differenza si cancella e il complesso quoziente coincide con $C_*(X, A)$. □

Lemma 9. *Il complesso $\widetilde{C}_*(\mathfrak{A})/\widetilde{C}_*(A)$ coincide con il complesso $C_*(B, A \cap B)$.*

Dimostrazione. Per definizione $\widetilde{C}_p(\mathfrak{A})$ ha come base i p-simplessi che sono interamente contenuti o in A o in B. Dunque la composizione $\widetilde{C}_p(B) \to \widetilde{C}_p(\mathfrak{A}) \to \widetilde{C}_p(\mathfrak{A})/\widetilde{C}_p(A)$ è suriettiva. E il suo nucleo è $\widetilde{C}_p(A \cap B)$. Dunque

$$C_p(B, A \cap B) = \widetilde{C}_p(B) \big/ \widetilde{C}_p(A \cap B) \cong \widetilde{C}_p(\mathfrak{A}) \big/ \widetilde{C}_p(A).$$

□

Da (3) e dal Lemma 8 deduciamo che

$$i_* : H_p\left(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) \middle/ \widetilde{C}_*(A)\right) \longrightarrow H_p(X, A), \tag{4}$$

è un isomorfismo. Dal Lemma 9 deduciamo che

$$H_p(B, A \cap B) = H_p\left(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) \middle/ \widetilde{C}_*(A)\right).$$

Osserviamo che $(X - Z, A - Z) = (B, A \cap B)$. Sia $j : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, Z)$ l'inclusione. Allora $j_\#$ si può fattorizzare nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd}
C_*(B, A \cap B) \arrow[r, "j_\#"] \arrow[d, "\cong"] & C_*(X, A) \\
\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) / \widetilde{C}_*(A) \arrow[r, "i"] & \widetilde{C}_*(X) / \widetilde{C}_*(A). \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

L'isomorfismo di complessi nella colonna a sinistra è quello del Lemma 9. Quello della colonna a destra è l'isomorfismo del Lemma 8. Se consideriamo i morfismi indotti in omologia otteniamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
H_p(B, A \cap B) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\cong"] & H_p(X, A) \\
H_p\left(\widetilde{C}_*(\mathfrak{A}) / \widetilde{C}_*(A)\right) \arrow[r, "i_*"] & H_p\left(\widetilde{C}_*(X) / \widetilde{C}_*(A)\right). \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Siccome i_* è un isomorfismo, anche j_* lo è.