

Teorema di escissione per l'omologia singolare.

Alessandro Ghigi

24 dicembre 2016

Sia X uno spazio topologico e $\mathfrak{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che $\{\mathring{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sia un ricoprimento aperto di X . Un p -simpleso singolare $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ è *piccolo* se $\sigma(\Delta_p) \subset U_\alpha$ per qualche $\alpha \in I$. Sia $C_p(\mathfrak{A}) \subset C_p(X)$ il sottogruppo generato dai semplici piccoli. Chiamiamoli gli elementi di $C_p(\mathfrak{A})$ *catene piccole*. Si verifica immediatamente che $\partial C_p(\mathfrak{A}) \subset C_{p-1}(\mathfrak{A})$. Dunque $C_\bullet(\mathfrak{A})$ è un sottocomplesso di $C_\bullet(X)$. Sia $i : C_\bullet(\mathfrak{A}) \hookrightarrow C_\bullet(X)$ l'inclusione.

Teorema 1. *Il morfismo indotto $i_\bullet : H_p(C_\bullet(\mathfrak{A})) \longrightarrow H_p(C_\bullet(X)) = H_p(X)$ è un isomorfismo per ogni p .*

In realtà dimostriamo il risultato analogo per l'omologia ridotta. Poniamo

$$\tilde{C}_p(X) := C_p(X) \text{ per } p \neq -1, \quad \tilde{C}_{-1}(X) := \mathbb{Z}.$$

L'operatore di bordo $\partial_p : \tilde{C}_p(X) \rightarrow \tilde{C}_{p-1}(X)$ è quello solito per $p \neq 0$ e $\partial_{-1} = \varepsilon$. Otteniamo così un complesso $\tilde{C}_\bullet(X)$, che ha come omologia l'omologia ridotta e che viene chiamato *complesso aumentato*. Possiamo fare la stessa costruzione per $C_\bullet(\mathfrak{A})$: questo complesso differisce da $C_\bullet(\mathfrak{A})$ solo in questo: $\tilde{C}_{-1}(\mathfrak{A}) := \mathbb{Z}$ e $\partial_0 = \varepsilon$. Dimostreremo che l'inclusione $i_\bullet : \tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) \hookrightarrow \tilde{C}_\bullet(X)$ induce isomorfismi $i_* : H_p(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})) \longrightarrow H_p(\tilde{C}_\bullet(X)) = \tilde{H}_p(X)$ per ogni p . Questo fatto è equivalente al teorema 1.

Sia $Y \subset \mathbb{R}^k$ un sottoinsieme convesso. Definiamo un sottocomplesso $A_\bullet(Y) \subset \tilde{C}_\bullet(Y)$ ponendo $A_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ e $A_p(Y) := \{p\text{-simplessi lineari in } Y\}$ per $p \geq 0$. Dato un punto $y \in Y$ definiamo un operatore $\check{y} : A_p(Y) \rightarrow A_{p+1}(Y)$ nel modo seguente: su $A_{-1}(Y)$ poniamo $\check{y}(1) := [y]$, mentre su $p \geq 0$ poniamo $\check{y}([v_0, \dots, v_p]) := [y, v_0, \dots, v_p]$.

Lemma 2. *\check{y} è un operatore di omotopia fra l'identità e il morfismo nullo: $\check{y}\partial + \partial\check{y} = id_{A_\bullet}$.*

Dimostrazione. Ricordando che $\partial_{-1} \equiv 0$ e che $\partial_0 = \varepsilon$ per $p = -1$ si ottiene

$$(\partial\check{y} + \check{y}\partial)(1) = \partial_0[y] + \check{y}\partial_{-1}(1) = \varepsilon([y]) = 1.$$

Per $p = 0$

$$(\partial\check{y} + \check{y}\partial)[v_0] = \check{y}(1) + \partial[yv_0] = [y] + [v_0] - [y] = [v_0].$$

Per $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
(\partial\check{y} + \check{y}\partial)[v_0, \dots, v_p] &= \partial[y, v_0, \dots, v_p] + \check{y}\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]\right) = \\
&= [v_0, \dots, v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} [y, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^i [y, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p] = \\
&= [v_0, \dots, v_p].
\end{aligned}$$

□

Sia $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un semplice affino in \mathbb{R}^n . L'immagine del semplice $[y, v_0, \dots, v_p]$ è il cono sopra l'immagine di σ con vertice y . Per questo motivo \check{y} è chiamato *operatore cono*.

Dato un p -simpleso *lineare* $\sigma := [v_0, \dots, v_p]$ poniamo

$$b_\sigma := \frac{v_0 + \dots + v_p}{p+1}.$$

b_σ è il *baricentro* di σ . Se $p = 0$ e $\sigma = [v_0]$, allora $b_\sigma = v_0$.

Definiamo un operatore $S_p : A_p(Y) \rightarrow A_p(Y)$. Per $p = -1$ poniamo $S_{-1} := \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Poi definiamo per ricorrenza S_p nel modo seguente: se $\sigma \in A_p(Y)$, allora

$$S_p \sigma := b_\sigma (S_{p-1} \partial \sigma).$$

Osserviamo che $S_0 = \text{id}_{A_0(Y)}$. Si può verificare qualche esempio per p piccolo:

$$\begin{aligned}
S_1([v_0, v_1]) &= [b, v_1] - [b, v_0], \quad \text{dove } b = \frac{v_0 + v_1}{2}, \\
S_2([v_0, v_1, v_2]) &= [b, b_0, v_2] - [b, b_0, v_1] - [b, b_1, v_2] + [b, b_1, v_0] + [b, b_2, v_1] - [b, b_2, v_0], \\
\text{dove } b &:= \frac{v_0 + v_1 + v_2}{3}, b_0 := \frac{v_1 + v_2}{2}, b_1 := \frac{v_0 + v_2}{2}, b_2 := \frac{v_0 + v_1}{2}.
\end{aligned}$$

S viene chiamato *operatore di suddivisione baricentrica*. Diciamo che un p -simpleso $\tau \in A_p(Y)$ *compare* nella m -esima suddivisione baricentrica di $\sigma \in A_p(Y)$ se $S^m \sigma = \sum_{j=1}^N a_j \sigma_j$ e $\tau = \sigma_j$ per qualche j .

Se $\sigma = [v_0, \dots, v_p] \in A_p(Y)$, indichiamo con $\text{diam}(\sigma)$ il diametro dell'involuppo convesso $\text{conv}\{v_0, \dots, v_p\}$, che coincide con l'immagine di σ .

Lemma 3. Se $\sigma = [v_0, \dots, v_p] \in A_p(Y)$, $\text{diam}(\sigma) = \max_{i,j} |v_i - v_j|$.

Dimostrazione. Consideriamo due punto qualsiasi $x, y \in \text{conv}(v_0, \dots, v_p)$. Dunque $x = \sum_{i=0}^p x_i v_i$ e $y = \sum_{i=0}^p y_i v_i$ con coefficienti che soddisfano le seguenti relazioni

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^p x_i = \sum_{i=0}^p y_i = 1.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \sum_{i=0}^p x_i v_i - y \right| = \left| \sum_{i=0}^p x_i (v_i - y) \right| \leq \sum_{i=0}^p x_i |v_i - y| \leq \max_i |v_i - y| \\ &= \max_i \left| v_i - \sum_{j=0}^p y_j v_j \right| = \max_i \left| \sum_{j=0}^p y_j (v_i - v_j) \right| \leq \max_{i,j} |v_i - v_j|. \end{aligned}$$

Dunque

$$\text{diam}(\sigma) = \sup_{x,y \in \text{conv}(v_0, \dots, v_p)} |x - y| \leq \max_{i,j} |v_i - v_j|.$$

La diseuguaglianza opposta è ovvia. □

Lemma 4. $S_\bullet : A_\bullet(Y) \rightarrow A_\bullet(Y)$ è un morfismo di complessi.

Dimostrazione. Siccome $S_{-1} = \text{id}$ e $S_0 = \text{id}$ si ha $S_{-1}\partial_0 = \partial_0 S_0$. Procediamo per induzione. Supponiamo che $S_{p-1}\partial_p = \partial_p S_p$ e verifichiamo che allora $S_p\partial_{p+1} = \partial_{p+1} S_{p+1}$. Infatti

$$\partial_{p+1} S_{p+1} \sigma = \partial_{p+1} b_\sigma (S_p \partial_{p+1} \sigma).$$

Dal lemma 2 segue che $\partial_{p+1} b_\sigma = -b_\sigma \partial_p + \text{id}$. Dunque

$$\partial_{p+1} S_{p+1} \sigma = -b_\sigma \partial_p S_p \partial_{p+1} \sigma + S_p \partial_{p+1} \sigma.$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva

$$b_\sigma \partial_p S_p \partial_{p+1} \sigma = b_\sigma S_{p-1} \partial_p \partial_{p+1} \sigma = 0.$$

Quindi $\partial_{p+1} S_{p+1} \sigma = S_p \partial_{p+1} \sigma$. □

Ora definiamo un operatore $T_p : A_p(Y) \rightarrow A_{p+1}(Y)$ nel modo seguente: $T_{-1} \equiv 0$ e per ricorrenza $T_p \sigma := b_\sigma(\sigma - T_{p-1} \sigma)$ se σ è un p -simpleso affine in Y .

Lemma 5. T è un operatore di omotopia fra $\text{id}_{A_\bullet(Y)}$ e S , ossia $\partial T + T \partial = \text{id} - S$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\partial_{p+1} T_p + T_{p-1} \partial_p = \text{id} - S_p$. Per $p = -1$ si vede subito che $\partial_0 T_{-1} + T_{-2} \partial_{-1} = 0$, come richiesto. Procediamo per induzione. Supponiamo che $\partial_{p+1} T_p + T_{p-1} \partial_p = \text{id} - S - p$. Sia $\sigma \in A_{p+1}(Y)$. Allora

$$\begin{aligned} (\partial_{p+2} T_{p+1} + T_p \partial_{p+1}) \sigma &= \partial_{p+2} T_{p+1} \sigma + T_p \partial_{p+1} \sigma = \\ &= \partial b_\sigma(\sigma - T_p \partial \sigma) + T_p \partial \sigma. \end{aligned}$$

Sappiamo dal lemma 2 che

$$\partial b_\sigma(\sigma - T_p \partial \sigma) = -b_\sigma \partial(\sigma - T_p \partial \sigma) + (\sigma - T_p \partial \sigma).$$

Dunque

$$\begin{aligned} (\partial_{p+2} T_{p+1} + T_p \partial_{p+1}) \sigma &= -b_\sigma \partial(\sigma - T_p \partial \sigma) + (\sigma - T_p \partial \sigma) + T_p \partial \sigma = \\ &= -b_\sigma \partial \sigma + b_\sigma \partial T_p \partial \sigma + \sigma. \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi induttiva: $\partial T_p \partial \sigma = -T_{p-1} \partial^2 \sigma + \partial \sigma - S_p \partial \sigma = \partial \sigma - S_p \partial \sigma$. Dunque

$$(\partial_{p+2} T_{p+1} + T_p \partial_{p+1}) \sigma = \sigma - b_\sigma S_p \partial \sigma = \sigma - S_{p+1} \sigma.$$

□

Ora estendiamo gli operatori S e T a catene singolari in spazi topologici qualsiasi mediante la seguente definizione: se $\sigma \in \tilde{C}_p(X)$

$$S(\sigma) := \sigma_{\#} (S \text{id}_{\Delta_p}), \quad T(\sigma) := \sigma_{\#} (T \text{id}_{\Delta_p}).$$

Questa definizione è *naturale* nel seguente senso: se $f : X \rightarrow Y$ è una applicazione continua e σ è un simplesso singolare in X , allora $f_{\#}(S\sigma) = S(f_{\#}\sigma)$ e analogamente per T . Da questo fatto, ragionando per induzione su m , segue facilmente che $S^m\sigma = \sigma_{\#}(S^m \text{id}_{\Delta_p})$. Anche nel caso generale $S : \tilde{C}_{\bullet}(X) \rightarrow \tilde{C}_{\bullet}(X)$ è un morfismo di complessi e T è un operatore di omotopia fra $\text{id}_{\tilde{C}_{\bullet}(X)}$ e S , per ogni spazio topologico X .

Fissato $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ indichiamo con S^m la composizione di S con sé stessa m volte. Poniamo

$$D_m := \sum_{i=0}^{m-1} T S^i.$$

Allora D_m è un operatore di omotopia fra $\text{id}_{\tilde{C}_{\bullet}(X)}$ e S^m . Infatti siccome $\partial S = S\partial$

$$\partial D_m + D_m \partial = \sum_{i=0}^{m-1} (\partial T + T \partial) S^i = (\text{id} - S) \sum_{i=0}^{m-1} S^i = \text{id} - S^m.$$

Per ogni m supponiamo che

$$S^m \text{id}_{\Delta_p} = \sum_{j=1}^{k_m} a_j \tau_{mj}.$$

Dato un p -simplesso singolare $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ definiamo $m(\sigma)$ come il più piccolo m tale che per ogni $j = 1, \dots, k_m$ esista un $\alpha \in I$ tale che $\sigma \tau_{mj}(\Delta_p) \subset U_{\alpha}$. Sfruttando il lemma 3 e il lemma di Lebesgue si vede che esistono sempre degli m con questa proprietà. Inoltre si vede che per $i = 0, \dots, p$

$$m(\sigma \circ F_p^i) \leq m(\sigma).$$

Poniamo

$$D\sigma := D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Per costruzione $D\sigma \in \tilde{C}_{\bullet}(X)$ dunque

$$D : \tilde{C}_p(X) \longrightarrow \tilde{C}_{p+1}(X).$$

Definiamo $\rho : \tilde{C}_{\bullet}(X) \rightarrow \tilde{C}_{\bullet}(X)$ imponendo che

$$\partial D + D\partial = \text{id} - \rho. \tag{1}$$

Dunque se $\sigma \in \tilde{C}_p(X)$

$$\rho(\sigma) := \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma. \tag{2}$$

Lemma 6. $\rho(\tilde{C}_p(X)) \subset \tilde{C}_p(\mathfrak{A})$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \rho(\sigma) &= \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D\partial\sigma = \\ &= \sigma - (\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma) + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma = \\ &= \sigma - (\text{id} - S^{m(\sigma)})\sigma + \sum_{i=0}^p (-1)^i (D_{m(\sigma)} - D)(\sigma F_p^i) = \\ &= S^{m(\sigma)}\sigma + \sum_{i=0}^p (-1)^i (D_{m(\sigma)} - D)(\sigma F_p^i). \end{aligned}$$

Per definizione di $m(\sigma)$, $S^{m(\sigma)}\sigma \in \tilde{C}_p(\mathfrak{A})$. Inoltre $m(\sigma F_p^i) \leq m(\sigma)$, dunque

$$(D_{m(\sigma)} - D)(\sigma F_p^i) = \sum_{j=m(\sigma F_p^i)}^{m(\sigma)-1} T S^j(\sigma F_p^i).$$

Se $j \geq m(\sigma F_p^i)$, $S^j(\sigma F_p^i) \in \tilde{C}_p(\mathfrak{A})$. Dunque $(D_{m(\sigma)} - D)(\sigma F_p^i) \in \tilde{C}_p(\mathfrak{A})$. Quindi abbiamo dimostrato che $\rho(\sigma) \in \tilde{C}_p(\mathfrak{A})$. \square

Lemma 7. $\rho : \tilde{C}_\bullet(X) \rightarrow \tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})$ è un morfismo di complessi di gruppi abeliani.

Dimostrazione. Usiamo (2):

$$\begin{aligned} \partial\rho(\sigma) &= \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma, \\ \rho(\partial\sigma) &= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma. \end{aligned}$$

\square

Dunque abbiamo due morfismi di complessi

$$\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) \xleftarrow{i} \tilde{C}_\bullet(X), \quad \tilde{C}_\bullet(X) \xrightarrow{\rho} \tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}).$$

Se σ è un p -simplexso piccolo, allora $m(\sigma) = 0$, dunque $D\sigma = 0$. Pertanto $\rho i = \text{id}_{\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})}$. Dunque

$$\rho_* i_* = (\rho i)_\bullet = \text{id} : H_p(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})) \rightarrow H_p(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})).$$

D'altro canto l'equazione (1) dice che $i\rho \simeq \text{id}_{\tilde{C}_\bullet(X)}$. Quindi $\text{id} = \text{id}_* = (i\rho)_* = i_*\rho_* : H_p(X) \rightarrow H_p(X)$. Ciò significa che $\rho_* : H_p(X) \rightarrow H_p(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}))$ e $i_* : H_p(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})) \rightarrow H_p(X)$ sono l'una l'inversa dell'altra. In particolare i_* è un isomorfismo. Abbiamo concluso la dimostrazione del Teorema 1.

Teorema 8 (di escissione). *Se $Z \subset A \subset X$ e $\bar{Z} \subset \mathring{A}$, allora l'inclusione $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, Z)$ induce isomorfismi $H_p(X - Z, A - Z) \cong H_p(X, A)$ per ogni $p \geq 0$.*

Poniamo $\mathfrak{A} := \{A, B := X - Z\}$. Allora \mathfrak{A} soddisfa le ipotesi del Teorema 1. Inoltre $\tilde{C}_\bullet(A)$ è un sottocomplesso di $\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A})$. Consideriamo le applicazioni i, ρ, D della formula (1). Tutte queste applicazioni mandano $\tilde{C}_\bullet(A)$ in sé stesso. Dunque passano al quoziente e producono applicazioni fra i complessi quoziente:

$$\begin{aligned} i &: \tilde{C}_p(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_p(A) \longrightarrow \tilde{C}_p(X) / \tilde{C}_p(A), \\ \rho &: \tilde{C}_p(X) / \tilde{C}_p(A) \longrightarrow \tilde{C}_p(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_p(A), \\ D &: \tilde{C}_p(X) / \tilde{C}_p(A) \longrightarrow \tilde{C}_{p+1}(X) / \tilde{C}_{p+1}(A). \end{aligned}$$

Queste applicazioni hanno ancora le stesse proprietà di quelle originali: i e ρ sono morfismi di complessi, $\rho i = \text{id}$ e D è una omotopia: $\text{id} - i\rho = \partial D + D\partial$. Dunque il morfismo indotto

$$i_* : H_p\left(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_\bullet(A)\right) \longrightarrow H_p\left(\tilde{C}_p(X) / \tilde{C}_p(A)\right), \quad (3)$$

è un isomorfismo.

Lemma 9. *Il complesso quoziente $\tilde{C}_\bullet(X) / \tilde{C}_\bullet(A)$ coincide con il complesso delle catene relative della coppia (X, A) .*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che il complesso aumentato $\tilde{C}_\bullet(X)$ differisce dal complesso delle catene singolari $C_\bullet(X)$ solamente in grado -1 , dove abbiamo aggiunto \mathbb{Z} . Siccome fra $\tilde{C}_\bullet(A)$ e $C_\bullet(A)$ c'è la stessa differenza, quozientando questa differenza si cancella e il complesso quoziente coincide con $C_\bullet(X, A)$. \square

Lemma 10. *Il complesso $\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_\bullet(A)$ è isomorfo al complesso $C_\bullet(B, A \cap B)$.*

Dimostrazione. Per definizione $\tilde{C}_p(\mathfrak{A})$ ha come base i p -simplessi che sono interamente contenuti o in A o in B . Dunque

$$\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) = \tilde{C}_\bullet(A) + \tilde{C}_\bullet(B) \subset \tilde{C}_\bullet(X).$$

Pertanto la composizione $\tilde{C}_p(B) \rightarrow \tilde{C}_p(\mathfrak{A}) \rightarrow \tilde{C}_p(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_p(A)$ è suriettiva. E il suo nucleo è $\tilde{C}_p(A \cap B)$. Dunque

$$C_p(B, A \cap B) = \tilde{C}_p(B) / \tilde{C}_p(A \cap B) \cong \tilde{C}_p(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_p(A).$$

\square

Da (3) e dal Lemma 9 deduciamo che

$$i_* : H_p\left(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_\bullet(A)\right) \longrightarrow H_p(X, A), \quad (4)$$

è un isomorfismo. Dal Lemma 10 deduciamo che

$$H_p(B, A \cap B) = H_p\left(\tilde{C}_\bullet(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_\bullet(A)\right).$$

Osserviamo che $(X - Z, A - Z) = (B, A \cap B)$. Sia $j : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, Z)$ l'inclusione. Allora $j_{\#}$ si può fattorizzare nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc} C_{\bullet}(B, A \cap B) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_{\bullet}(X, A) \\ \downarrow \cong & & \cong \uparrow \\ \tilde{C}_{\bullet}(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_{\bullet}(A) & \xrightarrow{i_{\bullet}} & \tilde{C}_{\bullet}(X) / \tilde{C}_{\bullet}(A). \end{array}$$

L'isomorfismo di complessi nella colonna a sinistra è quello del Lemma 10. Quello della colonna a destra è l'isomorfismo del Lemma 9. Se consideriamo i morfismi indotti in omologia otteniamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_p(B, A \cap B) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X, A) \\ \downarrow \cong & & \cong \uparrow \\ H_p(\tilde{C}_{\bullet}(\mathfrak{A}) / \tilde{C}_{\bullet}(A)) & \xrightarrow{i_*} & H_p(\tilde{C}_{\bullet}(X) / \tilde{C}_{\bullet}(A)). \end{array}$$

Siccome i_* è un isomorfismo, anche j_* lo è.