Esame di Geometria Differenziale - 26/1/2009

Esercizio 1. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen} t \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t).$$

1. Dimostrare che α è una curva biregolare.

   Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \big(-3\operatorname{sen}(t)\cos^2(t), -2\cos(t) + 3\cos^3(t), -1 + 2\cos^2(t)\big) \\
\alpha'' &= \big(6(\cos(t) - 9\cos^3(t), 2\operatorname{sen}(t) - 9\operatorname{sen}(t)\cos^2(t), -4\operatorname{sen}(t)\cos(t)\big) \\
\alpha''' &= \big(-6\operatorname{sen}(t) + 27\operatorname{sen}(t)\cos^2(t), 20\cos(t) - 27\cos^3(t), 4 - 8\cos^2(t)\big) \\
\alpha' \wedge \alpha'' &= \big(6\operatorname{sen}(t)\cos^4(t) + 2\operatorname{sen}(t) - 5\operatorname{sen}(t)\cos^2(t), \\
&\quad - 6\cos^5(t) - 6\cos(t) + 9\cos^3(t), -3\cos^4(t) + 6\cos^2(t)\big)
\end{aligned}$$

2. Calcolare la curvatura di α in $t = 0$.

   Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= (0, 1, 1) \\
\alpha'' &= (-3, 0, 0) \\
\alpha''' &= (0, -7, -4) \\
\alpha' \wedge \alpha'' &= (0, -3, 3)
\end{aligned}$$

$$|\alpha'| = \sqrt{2}$$

$$|\alpha' \wedge \alpha''| = \sqrt{18}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$\tau = -\frac{1}{2}$$

3. Calcolare il triedro di Frenet di α per $t = 0$.

   Svolgimento:

$$\begin{aligned}
t &= \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\
n &= (-1, 0, 0) \\
b &= \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

4. Dimostrare che la curvatura e la torsione di α soddisfano

$$k(t + \pi) = k(t), \quad \tau(t + \pi) = \tau(t)$$

   per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: $\operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t$ e $\cos(t+\pi) = -\cos t$. Dunque se poniamo $\beta(t) = \alpha(t+\pi)$,

$$\beta(t) = \alpha(t+\pi) = (-\cos^3 t, -\operatorname{sen} t \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t) = A\alpha(t)$$

dove $A \in SO(3)$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Curvatura e torsione sono invarianti per isometrie positive di $\mathbb{R}^3$, dunque $k_\beta = k_\alpha$ e $\tau_\beta = \tau_\alpha$. D'altronde ovviamente $k_\beta(t) = k_\alpha(t)$ e $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(t+\pi)$.

Esercizio 2.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 e $B : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Supponiamo che esistano tre vettori v_1, v_2, v_3 a due a due linearmente indipendenti e tali che

   $$B(v_1, v_1) = B(v_2, v_2) = B(v_3, v_3) = 0.$$

   Dimostrare che allora $B \equiv 0$. (Suggerimento: è sufficiente provare che $B(v_1, v_2) = 0$. Scrivere $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda \neq 0$, ...)

   Svolgimento: $\{v_1, v_2\}$ è una base di V. Scriviamo $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Allora $\lambda \neq 0$ perché altrimenti v_3 sarebbe un multiplo di v_2. Per lo stesso motivo $\mu \neq 0$. Sfruttando bilinearità e simmetria di B Calcoliamo

   $$\begin{aligned} 0 = B(v_3, v_3) = B(\lambda v_1 + \mu v_2, \lambda v_1 + \mu v_2) = \\ = \lambda^2 B(v_1, v_1) + 2\lambda\mu B(v_1, v_2) + \mu^2 B(v_2, v_2) = \\ = 2\lambda\mu B(v_1, v_2). \end{aligned}$$

   Posso dividere per λ e per μ. Quindi $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1) = 0$. B è nulla sulle coppie formate da elementi di una ase, quindi e identicamente nulla.

2. Sia S una superficie regolare e siano $p \in S$ e $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che se la retta $\ell = \{p + tv, t \in \mathbb{R}\}$ è contenuta in S, allora $v \in T_pS$ e $h_p(v, v) = 0$.

   Svolgimento: Poniamo $\alpha(t) = p + tv$. Allora α è una curva parametrizzata contenuta in S e $\alpha(0) = p, \dot\alpha(0) = v$. Per defininizione $v \in T_pS$. Inoltre

   $$\begin{aligned} h_p(v, v) = h_p(\dot\alpha(0), \dot\alpha(0)) = \\ \langle N(p), \ddot\alpha(0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

   perché α è una retta.

3. Sia S è un superficie regolare connessa. Supponiamo che per ogni punto di S passino 3 rette distinte tutte contenute in S. Dimostrare che S è contenuta in un piano. (Suggerimento: applicare i due punti precedenti.)

Svolgimento: Supponiamo che $\varphi : U \to S$ sia una parametrizzazione definita su un aperto connesso $U \subset \mathbb{R}^2$. Allora su $V = \varphi(U)$ è definito un campo normale unitario $N : U \to S^2$. Siano $l_i = \{p + tv_i : t \in \mathbb{R}\}$ le tre rette. Poiché sono distinte, i vettori v_i sono a due a due linearmente indipendenti. Per il punto 2 $h_p(v_i, v_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Per il punto 1 risulta $h_p \equiv 0$. Ma allora $h_p(v, w) = \langle -dN_p(v), w\rangle = 0$ per ogni coppia $v, w \in T_pS$. Dunque per ogni $v \in T_pS$ si ha $dN_p(v) = 0$. Pertanto $dN_p = 0$ e questo vale in ogni punto $p \in U$. Quindi $N : U \to S^2$ è una applicazione costante $N(p) \equiv \bar{N}$. A questo punto si può procedere come quando si dimostra che una curva biregolare con torsione nulla è piana: fissiamo $p_0 \in V$ e poniamo $c = \langle p_0, \bar{N}\rangle$. Se $p \in V$ posso scegliere una curva parametrizzata $\alpha : [0, 1] \to V$ tale che $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \bar{N}, \alpha(t)\rangle = \langle \bar{N}, \dot{\alpha}(t)\rangle = 0$$

perché $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}S \perp \bar{N}$. Dunque

$$\langle \bar{N}, p\rangle = \langle \bar{N}, p_0\rangle = c$$

ossia V è contenuto nel piano $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \bar{N}\rangle = c$. Per connessione tutta S è contenuta nello stesso piano.

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x, y, z) = x^2 - 16y^2 - z$$

e sia $S_1 = F^{-1}(0)$. Dimostrare che S_1 è una superficie regolare e che l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S_1$

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - 16v^2)$$

è una parametrizzazione globale di S_1.

5. Dimostrare che per ogni punto p di S_1 passano 2 rette distinte contenute interamente in S_1. (Suggerimento: fissiamo un punto $p \in S_1$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo la retta $\ell = \{p + tv, t \in \mathbb{R}\}$. Se $\ell \subset S$, allora $F(p + tv)$ è un polinomio di secondo grado in t che si annulla identicamente ...).

Svolgimento: Fissiamo $p = (x, y, z)$ e consideriamo un vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$. La retta $\ell = \{p+tv, t \in \mathbb{R}\}$ è contenuta in S se e soltanto se la funzione $G(t) = F(p+tv)$ è identicamente nulla. Osserviamo che $G = G(t)$ è un polinomio di secondo grado in t. Pertanto G è identicamente nulla se e soltanto se coefficienti del polinomio sono tutti e tre nulli. Calcoliamo

$$\begin{aligned} G(t) &= (x + tv_1)^2 - 16(y + tv_2)^2 - (z + tv_3) = \\ &= (v_1^2 - 16v_2^2)t^2 + (2xv_1 - 32yv_2 - v_3)t + (x^2 - 16y^2 - z). \end{aligned}$$

Allora $\ell \subset S$ se e soltanto se

$$\begin{cases} v_1^2 - 16v_2^2 = 0 \\ 2xv_1 - 32yv_2 - v_3 = 0 \\ x^2 - 16y^2 - z = 0. \end{cases}$$

La terza equazione dice solo che $p \in S$. Le prime due equazioni danno le condizioni su v affinché $\ell \subset S$. Se moltiplico v per un numero non nullo la retta ℓ non cambia. Quindi mi interessa v a meno di multipli. Dalla prima ricaviamo $v_1 = \pm 4v_2$. Se pongo v_2 uguale a un qualunque numero non nullo e scelgo uno dei due valori possibili per v_1, posso ricavare v_3 dalla terza equazione.

6. Dimostrare che S_1 non ha punti ellittici.

Svolgimento: Si posso svolgere i calcoli e si trova che ogni punto di S è iperbolico. Però si può anche procedere sfruttando i punti precedenti. Per ogni punto $p \in S$ passa almeno una retta (sappiamo che infatti ce ne passano due). Quindi esiste $v \in T_pS, v \neq 0$ tale che $h_p(v,v) = 0$. Pertanto h_p non è definita né positiva, né negativa. Ma allora p non è ellittico, infatti se p avrei o $k_1 \leq k_2 < 0$ o $0 < k_1 \leq k_2$. Nel primo caso $h_p(v,v) \leq k_2|v|^2 < 0$ è definita negativa. Nel secondo caso è definita positiva. In entrambi i casi se $v \neq 0$, $h_p(v,v) \neq 0$.