

# DIFFERENZIALE

①

Sia  $F: M \rightarrow N$  una applicazione  $C^\infty$  fra due varietà differenziabili  $M$  ed  $N$  di dimensioni rispettivamente  $m$  ed  $n$ . Fissiamo  $p \in M$ .

Sia  $q := F(p) \in N$  e indichiamo con  $\mathcal{A}_p$  le curve lisce in  $M$  passanti per  $p$  e con  $\mathcal{A}_q$  le curve lisce in  $N$  passanti per  $q$ .

$F$  induce una applicazione

$$\mathcal{A}_p \longrightarrow \mathcal{A}_q \quad (1)$$

$$\alpha \longmapsto F \circ \alpha.$$

Infatti se  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  è liscia, allora  $F \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  è liscia perché la composizione di applicazioni lisce è liscia.

$F$  induce anche una applicazione fra i germi di funzioni. Indichiamo con  $\mathcal{C}_p^\infty$  i germi di funzioni lisce in  $p$  (definite su  $M$  vicino a  $p$ ) e con  $\mathcal{C}_q^\infty$  i germi di funzioni lisce in  $q$  (definite su  $N$  vicino a  $q$ ).

Se  $V \subseteq N$  è aperto, allora possiamo definire una applicazione

$$F^*: C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(F^{-1}(V))$$

$$f \longmapsto F^*f := f \circ F$$

$F^*$  e' detta pull-back (letteralmente "tirare indietro"). Questa applicazione e' un morfismo di  $\mathbb{R}$ -algebre (dimostrare!).

Segue che questa applicazione passa ai germi, ossia la mappa

$$F^*: C_q^\infty \longrightarrow C_p^\infty$$

(2)

$$f_q \longmapsto F^*f_q := (f \circ F)_p$$

e' ben definita, cioe' indipendente dal rappresentante scelto per il germe (dimostrare!).

Indichiamo anche questa applicazione semplicemente con  $F^*$ . Anche questa e' un morfismo di  $\mathbb{R}$ -algebre.

I vettori tangenti ad  $M$  in  $p$  sono stati definiti in due modi: mediante le curve e mediante le derivazioni. Ora definiremo il differenziale di  $F$  sfruttando la prima definizione e l'applicazione (1). Successivamente vedremo come interpretare il differenziale in termini di derivazioni, sfruttando l'applicazione (2).

Fissiamo delle carte  $(U, \varphi)$  su  $M$  (3)

e  $(V, \psi)$  su  $N$  tali che  $F(U) \subset V$

e  $p \in U$ . Poniamo  $a = \varphi(p) \in \mathbb{R}^m$

$b = \psi(q) \in \mathbb{R}^n$ .

Sia  $\bar{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$

Ovviamente  $b = \bar{F}(a)$ .

Lemma Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$ . Se  $\alpha \sim \beta$   
allora  $F \circ \alpha \sim F \circ \beta$ .

Dim

Per definizione  $\alpha \sim \beta$  significa che

$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$ . Allo stesso modo, per  
dimostrare che  $F \circ \alpha \sim F \circ \beta$  dobbiamo

dimostrare che  $(\psi \circ F \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ F \circ \beta)'(0)$ .

Osserviamo che

$\psi \circ F \circ \alpha = \bar{F} \circ (\varphi \circ \alpha)$ , dunque

$$(\psi \circ F \circ \alpha)'(0) = d\bar{F}_a ((\varphi \circ \alpha)'(0)) =$$

$$= d\bar{F}_a ((\varphi \circ \beta)'(0)) = d(\bar{F} \circ \varphi \circ \beta)'(0)$$

$$= (\psi \circ F \circ \beta)'(0)$$

///

Ricordiamo ora che lo spazio tangente  $T_p M$  è definito come quoziente ④

$$T_p M := \mathcal{A}_p / \sim$$

Se  $\alpha \in \mathcal{A}_p$  la classe  $[\alpha]$  è indicata con il simbolo  $\dot{\alpha}(0)$  e viene chiamata "vettore tangente ~~corrispondente~~ alla curva  $\alpha$ ".

Il precedente lemma dice che la mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_p & \longrightarrow & \mathcal{A}_q \\ \alpha & \longmapsto & F \circ \alpha \end{array}$$

è compatibile con le relazioni  $\sim$ , e dunque la mappa passa al quoziente e dà luogo ad una applicazione

$$T_p M = \mathcal{A}_p / \sim \longrightarrow T_q N = \mathcal{A}_q / \sim$$

$$\dot{\alpha}(0) = [\alpha] \longmapsto [F \circ \alpha]$$

Questa applicazione si chiama differenziale di  $F$  in  $p$  e si indica con  $dF_p$ .

Ricordiamo la notazione introdotta nello studio dello spazio tangente: sfruttando la carta  $\varphi$  su  $M$  e la carta  $\psi$  su  $N$  è possibile definire applicazioni

$$F_\varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow T_p M$$

$$F_\psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_q N$$

$F_\varphi(v) :=$  il vettore tangente corrispondente alla curva  
 $t \mapsto \varphi^{-1}(a + tv)$

Ossia se  $\alpha_v(t) := \varphi^{-1}(a + tv)$

$$\alpha_v \in \mathcal{A}_p \quad \text{e} \quad F_\varphi(v) = \dot{\alpha}_v(0) = [\alpha_v]$$

Ricordiamo che  $F_\varphi$  e  $F_\psi$  sono (per costruzione) isomorfismi lineari.

Proposizione  $dF_p$  è lineare e per ogni coppia di carte  $\varphi$  e  $\psi$  come sopra, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{dF_p} & T_q N \\ F_\varphi \uparrow & & \uparrow F_\psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d\bar{F}_a} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

commuta.

Dimostrazione

Cominciamo a dimostrare che (6)  
il diagramma commuta.

Sia  $v \in \mathbb{R}^m$  e  $\alpha_v(t) = \bar{\varphi}^{-1}(a + tv)$   
come sopra. Poniamo  $w := d\bar{F}_a(v) \in \mathbb{R}^n$ .

$$dF_p(F_\varphi(v)) = dF_p(\dot{\alpha}_v(0)) = [F \circ \alpha_v]$$

Invece ponendo  $\alpha_w(t) := \psi^{-1}(b + tw)$   
abbiamo  $\alpha_w \in \mathcal{A}_q$  e

$$F_\psi(d\bar{F}_a(w)) = F_\psi(w) = \dot{\alpha}_w = [\alpha_w].$$

Dunque dobbiamo provare che

$$F \circ \alpha_v \sim \alpha_w \quad \text{in } \mathcal{A}_q,$$

ossia

$$(\psi \circ F \circ \alpha_v)'(0) \stackrel{?}{=} (\psi \circ \alpha_w)'(0).$$

$$\text{In fatti} \quad \psi \circ \alpha_w(t) = b + tw$$

$$\Rightarrow (\psi \circ \alpha_w)'(0) = w.$$

D'altronde

(7)

$$\begin{aligned} (\psi \circ F \circ \alpha_v)'(0) &= \frac{d}{dt} \psi \circ F \circ \psi^{-1}(a + tv) \Big|_{t=0} \\ &= d\bar{F}_a(v) = w. \end{aligned}$$

///

Ora vogliamo interpretare  $dF_p$  in termini di derivazioni.

Ricordiamo pertanto che ~~una~~ derivazione di  $C_p^\infty$  è ~~un funzionale~~ un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare

$$D: C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$D(f_p \cdot g_p) = (D(f_p)) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g_p).$$

Indichiamo ~~con~~  $\mathcal{D}_p$  l'insieme di tutte le derivazioni di  $C_p^\infty$ . Sappiamo che  $\mathcal{D}_p$  è uno spazio vettoriale reale e che c'è una applicazione

$$\Phi_p: T_p M \longrightarrow \mathcal{D}_p$$

che è un isomorfismo lineare.

Ricordiamo la definizione di  $\Phi_p$ . ⑧

Se  $X \in T_p M$  allora  $X = \dot{\alpha}(0) = [\alpha]$   
per qualche curva  $\alpha \in \mathcal{A}_p$ .

Allora  $\Phi_p(X) \in \mathcal{D}_p$  e' ~~la derivata~~  
l'operatore di derivazione lungo la curva  
 $\alpha$ :

$$\Phi_p(X) f_p := \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0}.$$

Ovviamente lo stesso discorso vale per  
il punto  $q \in N$ , dunque e' un iso-  
morfismo

$$\Phi_q: T_q N \longrightarrow \mathcal{D}_q.$$

Ora torniamo al differenziale.

Se  $D \in \mathcal{D}_p$  definiamo un funzionale  
 $F_* D: \mathcal{C}_q^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$  mediante la regola

$$(F_* D)(g_q) := D(F^* g_q). \quad \text{\del{D(g_q)}}$$

In altre parole  $F_* D := D \circ F^*$   
dove  $F^*: \mathcal{C}_q^\infty \longrightarrow \mathcal{C}_p^\infty$  e' il

pull-back.

(9)

Lemma Per ogni  $D \in \mathcal{D}_p$  si ha

$$F_* D \in \mathcal{D}_q$$

dim

$F_* D: \mathcal{C}_q^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  è ovviamente lineare (dim!).

Verifichiamo che soddisfa le regole di Leibniz: siano  $f_q, g_q \in \mathcal{C}_q^\infty$ .

Allora

$$\begin{aligned} (F_* D)(f_q \cdot g_q) &= D(F^*(f_q \cdot g_q)) = \\ &= D((F^* f_q) \cdot (F^* g_q)) = \\ &= D(F^* f_q) \cdot (F^* g_q)(p) + \\ &\quad + (F^* f_q)(p) \cdot D(F^* g_q) = \\ &= D(F^* f_q) \cdot g(q) + f(q) \cdot D(F^* g_q) = \\ &= (F_* D)(f_q) \cdot g(q) + f(q) \cdot (F_* D)(g_q). \end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che  $F^*$  è un morfismo di algebre e il fatto che  $D$  è una derivazione in  $p$ . ///

Possiamo pertanto definire una  
applicazione

(10)

$$\begin{aligned} F_*: \quad D_p &\longrightarrow D_q \\ D &\longmapsto F_* D \end{aligned}$$

Questa applicazione è lineare (dimostrare!)  
e non è stato necessario  
introdurre coordinate per definirla.

Lemma Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{dF_p} & T_q N \\ \Phi_p \downarrow & & \downarrow \Phi_q \\ D_p & \xrightarrow{F_*} & D_q \end{array}$$

commuta.

Dim Sia  $X \in T_p M$  e sia  $\alpha \in \mathcal{A}_p$   
tale che  $X = \dot{\alpha}(0)$  (cioè  $X = [\alpha]$ ).

Sia  $D = \Phi_p(X) \in D_p$ .

Poniamo  $\beta := F \circ \alpha$ . Allora  $dF_p(X) = \dot{\beta}(0)$ .

Sia  $f_q \in \mathcal{C}_q^\infty$ . Allora

(11)

$$\begin{aligned} & \left( \Phi_q (dF_p(x)) \right) (f_q) = \left( \Phi_q (\dot{\beta}(0)) \right) (f_q) = \\ & = \frac{d}{dt} f(\beta(t)) \Big|_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt} f(F(\alpha(t))) \Big|_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt} (f \circ F)(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \\ & = \left( \Phi_p(x) \right) (f \circ F)_p = \\ & = \Phi_p(x) (F^*(f_q)) = \\ & = (F_* \Phi_p(x)) (f_q). \end{aligned}$$

Questo vale per ogni  $f_q \in \mathcal{C}_q^\infty$   
dunque

$$\Phi_q dF_p(x) = F_* \Phi_p(x).$$

///

Se identifichiamo  $T_p M$  con  $D_p$  mediante l'isomorfismo  $\Phi_p$  e facciamo lo stesso per  $T_q N$  e  $D_q$ , allora il lemma dice che  $dF_p = F_*$ .

D'ora innanzi identifichiamo sistematicamente  $T_p M$  con  $D_p$  mediante l'applicazione  $\Phi_p$ .

Considereremo le classi di equivalenza di curve e le derivazioni come due aspetti dello stesso oggetto (il vettore tangente).

Proposizione Se  $\varphi = (x^1 \dots x^m)$  e  $\psi = (y^1 \dots y^n)$  allora

$$dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{F}^i}{\partial x^i}(a) \cdot \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_q.$$

In altre parole, sfruttando le basi

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\} \text{ su } T_p M \text{ e } \left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_q \right\} \text{ su } T_q N$$

$dF_p$  è rappresentato dalla matrice

Jacobiane

$$J\bar{F}(a) = \left( \frac{\partial \bar{F}^i}{\partial x^j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad (13)$$

Dim

Poiché  $dF_p = F_*$  è sufficiente verificare la formula in termini di derivazioni.

Sia  $f_g \in \mathcal{C}_q^\infty$ . Allora

$$\begin{aligned} \left( dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \right) (f_g) &= \left( F_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \right) (f_g) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (F^* f_g) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f \circ F)_p = \\ &= \frac{\partial (f \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} (a) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \varphi^{-1} \circ \bar{F}) (a) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial y^i} (\bar{F}(a)) \cdot \frac{\partial \bar{F}^i}{\partial x^j} (a) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^i}(a) \cdot \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^i}(b).$$

(14)

D'altra parte per definizione

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_q (f_q) = \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^i}(b)$$

$$b = \psi(q).$$

Dunque

$$\left( dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \right) (f_q) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{F}^i}{\partial x^i}(a) \cdot \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_q \right) (f_q)$$

poiché questo vale per ogni germe  $f_q$

$$\Rightarrow dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{F}^i}{\partial x^i}(a) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_q.$$

///

Supponiamo che  $M=V$  sia uno spazio vettoriale reale di dim  $m$ .  $V$  ha una struttura differenziabile canonica: quella data dalle carte lineari, ossia gli isomorfismi  $V \cong \mathbb{R}^m$  indotti dalle basi. Fissiamo su  $V$  questa struttura differenziabile.

Dimostriamo che  $T_p V \cong V$   $\forall p \in V$ ,  
canonicamente

"Canonicamente" significa che l'isomorfismo non dipende dalla scelta della base.

Infatti l'isomorfismo

$$\Phi: V \longrightarrow T_p V$$

è ~~costruito~~ costruito nel modo seguente: dato  $v \in V$  e  $p \in V$  consideriamo la retta ~~definita da~~

$$\alpha_v(t) = p + tv. \quad \alpha_v \text{ è liscia.}$$

Allora poniamo  $\Phi(v) := \dot{\alpha}_v(0)$ .

Dimostriamo che  $\Phi$  è isomorfismo.

Nel caso di  $V = \mathbb{R}^n$  troviamo che

$$T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo poi che  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  sia (16)  
 un aperto e che  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  sia un  
 altro aperto.

$M$  ed  $N$  sono varietà differenziabile  
 e possiamo considerare le carte  
 globali:  $(U, \varphi)$  su  $M$

$$U = M \quad \varphi: M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\varphi(x) = x$$

$(V, \psi)$  su  $N$

$$V = N$$

$$\psi(y) = y$$

$$\psi: N \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

Una applicazione

$$F: M \longrightarrow N$$

è  $C^\infty$  nel senso usuale (diciamo nel senso  
 di Analisi II)  $\Leftrightarrow$  è  $C^\infty$  nel senso  
 delle carte. Inoltre dato  $p \in M$

$$q \equiv F(p) \in N$$

identifichiamo

$$T_p M = \mathbb{R}^m$$

$$\text{e } T_q N = \mathbb{R}^n \text{ come}$$

sopra.

Allora

il differenziale

(17)

$$dF_p : T_p M \longrightarrow T_q N$$

che abbiamo appena definito  
coincide con il differenziale solito

$$dF_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

come definito in Analisi II.



Dimostrare per esercizio!