

Se $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ sottogruppo.

Allora o Γ è chiuso, discreto e ciclico infinito
oppure $\overline{\Gamma} = \mathbb{R}$ ✓

dim a) se 0 è ~~di~~ di acc per Γ
 $\Rightarrow$ ~~$\Gamma = \mathbb{R}$~~ $\Gamma = \mathbb{R}$

dim: $x \in \mathbb{R}$. $\varepsilon > 0$

cerco $y \in \Gamma \cap (0, \varepsilon)$

$$n := \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$$

$$ny \leq x < ny + y < ny + \varepsilon$$

$$0 \leq x - ny < \varepsilon$$

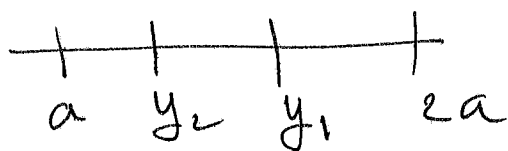
b) se 0 non è di acc per Γ

$\Rightarrow$ Γ è discreto, chiuso e ciclico infinito

dim: $a := \inf \Gamma \cap (0, +\infty)$. $a > 0$.

Supponiamo $a \notin \Gamma$. Allora $\exists y_1 \in (a, 2a) \cap \Gamma$

ed $\exists y_2 \in (a, y_1) \cap \Gamma$



$$\Rightarrow 0 < y_1 - y_2 < a$$

$$y_1 - y_2 \in \Gamma$$

assurdo.

Quindi $a \in \Gamma$.

Sia ora $x \in \Gamma_n(0, +\infty)$ (2)

$$n := \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \quad ma \leq x < (n+1)a$$

$$x - na \in \Gamma_n[0, a) \Rightarrow x = na.$$

Quindi Γ è ciclico infinito ed è
ovviamente chiuso e discreto.

Curva dense sul toro.

$$T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$$

$$\pi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 \quad \pi(t_1, t_2) := \left(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2} \right)$$

π è un diffeomorfismo locale.

Suffici se $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d\pi_{(t_1, t_2)}(v_1, v_2) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(e^{2\pi i(t_1 + sv_1)}, e^{2\pi i(t_2 + sv_2)} \right)$$

$$= \left(2\pi i v_1 \cdot e^{2\pi i t_1}, 2\pi i v_2 \cdot e^{2\pi i t_2} \right)$$

Quindi $d\pi_{(t_1, t_2)}$ è iniettivo

$$\Rightarrow \text{è un isom} \quad \mathbb{R}^2 = T_{(t_1, t_2)} \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\pi(t_1, t_2)} T^2$$

Sia $a \notin \mathbb{Q}$.

Consideriamo $f: \mathbb{R} \rightarrow T$

$$f(t) = \pi(t, at)$$

• f è una immersione. Infatti sia

$$\alpha(t) = (t, at) \quad \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ è una}$$

immersione $f = \pi \circ \alpha$

$$\Rightarrow df_t = d\pi_{\alpha(t)} \circ d\alpha_t$$

$\uparrow$ isom $\uparrow$ iniettivo

$\Rightarrow df_t$ è iniettivo.

• f è iniettiva. Infatti se $f(t) = f(s)$
con $t \neq s$, avrei

$$\pi(t, at) = \pi(s, as)$$

$$\Rightarrow (t, at) = (s, as) + (m, n)$$

$m, n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow t - s = m$$

$$a(t - s) = n$$

Se $t - s \neq 0$ ottengo $a = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$
contro l'ipotesi.

• Sia $A \subset \mathbb{T}^2$ aperto e sia

(4)

$$(x, y) \in \pi^{-1}A \text{ ed } \varepsilon > 0$$

$$I(x, \varepsilon) \times I(y, \varepsilon) \subset \pi^{-1}A$$

Cerco $t \in \mathbb{R}$ $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$|x - t - m| < \varepsilon$$

$$|y - at - n| < \varepsilon.$$

Se posso $t = x - m$

allora $|y - a(x - m) - n| =$

$$= |y - ax + am - n| < \varepsilon$$

Quindi posso $\Gamma := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}a$

Γ non è ciclico: infatti se fosse

$$\Gamma = \mathbb{Z}b \implies 1 = mb \quad a = nb$$

$$\implies a = \frac{n}{m} \cdot mb = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}.$$

$$\implies \overline{\Gamma} = \mathbb{R}.$$

Allora $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$|y - ax + am - n| < \varepsilon$$

pongo $t := x - m$. Allora (5)

$$h_o \quad |x - t - m| = 0 < \varepsilon$$

$$|y - at - n| = |y - ax + am - n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (t+m, at+n) \in I(x, \varepsilon) \times I(y, \varepsilon) \\ \subseteq \pi^{-1}A$$

$$\Rightarrow \pi(t, at) = \pi(t+m, at+n) \in A$$

$$\Rightarrow \pi(t, at) = f(t) \in A \cap \text{Im } f$$

Abbiamo dimostrato che se $A \subset T^2$ è un aperto qualsiasi, allora $A \cap \text{Im } f \neq \emptyset$. Ossia $\text{Im } f$ è denso in T^2 .

• Segue che $\text{Im } f$ non è una sottovarietà regolare. Infatti una sottovarietà regolare chiusa è necessariamente un aperto. Invece $\text{Im } f$ non è aperto, p.e. perché $\text{Im } f \cap \pi(\mathbb{Q}^2) = \emptyset$.