allmanq77INlapp1gh1beo1Fs8antani33aJ	22 luglio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & -2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

allmanq77INlapp1gh2beo1Fs8antani33aJ	**22 luglio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & 1-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

allmanq77INlapp1gh3beo1Fs8antani33aJ	22 luglio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-3 & 2k-3 & 2k-3 \\ k-1 & 1-k & k-1 & 1 \\ 1-k & 3-k & 3-2k & 2-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

allmanq77INlapp1gh4beo1Fs8antani33aJ	**22 luglio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 3-k & 5-2k & 5-2k \\ k-3 & 3-k & 3-k & 1 \\ k-1 & k-3 & 2k-5 & 2k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.