

allmanq77INlapp1gh1beo1Fs8antani33aJ	22 luglio 2022
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & -2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:
- Sia  $k = -1$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
0	2	3	no	—
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 1 \\ 2 & \text{se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolvibile per  $k \neq 0$ ,

$\dim \text{Sol} = 3$  mai!

Soluzione per  $k = -1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  nello spazio euclideo, si considerino i punti  $A$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $B$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r'$  parallela ad  $r$  e passante per il punto  $C$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  contenente  $r$  e  $r'$ .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da  $\pi$ .

(a)  $r : y = 1, x + z = 2.$

(b)  $r' : y = 2, x + z = 1.$

(c)  $\pi : x + y + z = 3.$

(d)  $d(O, \pi) = \sqrt{3}.$

---

3. (8pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ; sia inoltre  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma

quadratica  $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X.$

- (a) Determinare gli autovalori di  $A$  e le relative molteplicità algebriche  $\mu$  e geometriche  $m$ .
- (b) Stabilire il segno di  $q$  (cioè se  $q$  è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).
- (c) Determinare una matrice ortogonale  $N$  per il cambio di variabile  $X = NX'$  che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.
- (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo*  $X_0$  tale che  $q(X) = 0$ , **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

Autovalori 0 con  $\mu = m = 1$  e 5 con  $\mu = m = 2$ ; semidefinita positiva; forma canonica:  $\tilde{Q} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 5y'^2 + 5z'^2. N = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  per esempio (un qualunque vettore in  $\text{Ker } A$ ).

---

allmanq77INlapp1gh2beo1Fs8antani33aJ	22 luglio 2022
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & 1-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:
- (d) Sia  $k = -1$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 1 \\ 2 & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni  $k$ .

$\dim \text{Sol} = 2$  per  $k = 1$ .

Soluzione per  $k = -1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  nello spazio euclideo, si considerino i punti  $A$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $B$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r'$  parallela ad  $r$  e passante per il punto  $C$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  contenente  $r$  e  $r'$ .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da  $\pi$ .

(a)  $r : y = -1, x - z = 3.$

(b)  $r' : y = -2, x - z = 2.$

(c)  $\pi : x - y - z = 4.$

(d)  $d(O, \pi) = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$

---

3. (8pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; sia inoltre  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma

quadratica  $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X.$

- (a) Determinare gli autovalori di  $A$  e le relative molteplicità algebriche  $\mu$  e geometriche  $m$ .
- (b) Stabilire il segno di  $q$  (cioè se  $q$  è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).
- (c) Determinare una matrice ortogonale  $N$  per il cambio di variabile  $X = NX'$  che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.
- (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo*  $X_0$  tale che  $q(X) = 0$ , **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

Autovalori 0 con  $\mu = m = 1$  e  $-2$  con  $\mu = m = 2$ ; semidefinita negativa; forma canonica:  $\tilde{Q} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -2x'^2 - 2y'^2.$   $N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$   $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  per esempio (un qualunque vettore in  $\text{Ker } A$ ).

---

allmanq77INlapp1gh3beo1Fs8antani33aJ	22 luglio 2022
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-3 & 2k-3 & 2k-3 \\ k-1 & 1-k & k-1 & 1 \\ 1-k & 3-k & 3-2k & 2-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:
- Sia  $k = -1$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
1	2	3	no	—
2	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 1, 2 \\ 2 & \text{se } k = 1, 2. \end{cases}$$

Risolvibile per  $k \neq 1, 2$ ,

$\dim \text{Sol} = 1$  per  $k = 1, 2$ .

Soluzione per  $k = -1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  nello spazio euclideo, si considerino i punti  $A$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $B$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r'$  parallela ad  $r$  e passante per il punto  $C$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  contenente  $r$  e  $r'$ .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da  $\pi$ .

(a)  $r : y = 2, x + z = 3.$

(b)  $r' : y = 3, x + z = 2.$

(c)  $\pi : x + y + z = 5.$

(d)  $d(O, \pi) = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$

---

3. (8pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ; sia inoltre  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma

quadratica  $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X.$

- (a) Determinare gli autovalori di  $A$  e le relative molteplicità algebriche  $\mu$  e geometriche  $m$ .
- (b) Stabilire il segno di  $q$  (cioè se  $q$  è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).
- (c) Determinare una matrice ortogonale  $N$  per il cambio di variabile  $X = NX'$  che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.
- (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo*  $X_0$  tale che  $q(X) = 0$ , **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

Autovalori: 4 con  $\mu = m = 1$  e 2 con  $\mu = m = 2$ ; definita positiva; forma canonica:  $\tilde{Q} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2. N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$   $X_0$ : la forma quadratica é definita positiva.

---

allmanq77INlapp1gh4beo1Fs8antani33aJ	22 luglio 2022
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} -k & 3-k & 5-2k & 5-2k \\ k-3 & 3-k & 3-k & 1 \\ k-1 & k-3 & 2k-5 & 2k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:
- (d) Sia  $k = 0$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
2	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 2 \\ 2 & \text{se } k = 2. \end{cases}$$

Risolubile per  $k \neq 2$ .

$\dim \text{Sol} = 1$  per  $k \neq 2$ .

Soluzione per  $k = 0$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  nello spazio euclideo, si considerino i punti  $A$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $B$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta  $r'$  parallela ad  $r$  e passante per il punto  $C$  di coordinate  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  contenente  $r$  e  $r'$ .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da  $\pi$ .

(a)  $r : y = -2, x + z = 1.$

(b)  $r' : y = -3, x + z = 2.$

(c)  $\pi : x + y + z = -1.$

(d)  $d(O, \pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

3. (8pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ; sia inoltre  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma

quadratica  $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X.$

- (a) Determinare gli autovalori di  $A$  e le relative molteplicità algebriche  $\mu$  e geometriche  $m$ .
- (b) Stabilire il segno di  $q$  (cioè se  $q$  è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).
- (c) Determinare una matrice ortogonale  $N$  per il cambio di variabile  $X = NX'$  che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.
- (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo*  $X_0$  tale che  $q(X) = 0$ , **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

Autovalori: 0 con  $\mu = m = 1$ , 10 con  $\mu = m = 1$  e  $-3$  con  $\mu = m = 1$ ; indefinita;

forma canonica:  $\tilde{Q} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 10y'^2 - 3z'^2. N = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

per esempio (un qualunque vettore in  $\text{Ker } A$ ).