ZQQ77INF018A8715K18MQ181881562337JJ	22 febbraio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & k & 1 \\ -2k+1 & -2 & -k+2 & k-1 \\ -k & 2 & k & 2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 1+k \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

---

3. **(6 pt)** Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -4x + 3y + 2z = x + z = 2x - y = 0 \right\}$.

(a) Determinare la dimensione e una base ortogonale di W:

(b) Determinare una base ortogonale di $W^{\perp}$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W.

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $W^{\perp}$:

ZQQ77INF018A8715K18MQ181882562337JJ	22 febbraio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+1 & 1 \\ 3 & -1 & -k+1 & k \\ 3k+1 & 1 & k+1 & 2k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

---

3. **(6 pt)** Sia $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \right\}$.

(a) Determinare la dimensione e una base ortogonale di U:

(b) Determinare una base ortogonale di $U^{\perp}$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^{\perp}$:

ZQQ77INF018A8715K18MQ181883562337JJ	**22 febbraio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & k-1 & 1 & 2 \\ 3k & k & 0 & 3k-1 \\ 3k+4 & k-1 & 1 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

---

3. **(6 pt)** Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 3y + z = 6x - 4z = 0 \right\}$.

(a) Determinare la dimensione e una base <u>ortonormale</u> di W:

(b) Determinare una base <u>ortogonale</u> di $W^{\perp}$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $W^{\perp}$:

ZQQ77INF018A8715K18MQ181884562337JJ	**22 febbraio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & k-2 & 1 & 2 \\ 3k-3 & k-1 & 0 & 3k-4 \\ 3k+1 & k-2 & 1 & 2k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -1 \\ -3 & -1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

---

3. **(6 pt)** Sia $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 2z = 0 \right\}$

(a) Determinare la dimensione e una base ortogonale di U:

(b) Determinare una base ortogonale di $U^{\perp}$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^{\perp}$:
