CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 febbraio 2020
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r.

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π.

   (d) Determinare il coseno dell'angolo fra $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$.

$r : x - 1 = y - z + 2 = 0$
$\pi : y + z - 2 = 0$
$Q = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
coseno: $1/2$, angolo: $\pi/3$

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r.

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π.

   (d) Determinare il coseno dell'angolo fra $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$.

$r : x - y - 1 = z - 1 = 0$
$\pi : x + y = 0$
$Q = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
coseno: $-\sqrt{2}/2$, angolo: $\dfrac{3\pi}{4}$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	3 febbraio 2021
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(9 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-5 & k-10 & k-5 & k-5 \\ k-5 & 3k-5 & k & k \\ 0 & 2k-10 & 2k-10 & k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 10$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
5	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 5 \\ 2 \text{ se } k = 5. \end{cases}$$

Risolubile per ogni k.

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 5$.

Soluzione per $k = 10$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/10 \\ -3/10 \\ 3/10 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Altra soluzione particolare:

$$\begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 6/5 \\ -12/5 \end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**3 febbraio 2021**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(9 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k-3 & k+3 & k & k \\ 2k-3 & 3 & 0 & -3 \\ k-3 & k+3 & 2k & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 2+2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0 \\ 2 \text{ se } k = 0. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 0$.

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per ogni $k \neq 0$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$