CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	3 febbraio 2021
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(9 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

$p_A(t) = -t(t-2)^2$.
$\mu(0) = m(0) = 1$, $\mu(2) = m(2) = 2$.
Base di V_0: $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$; base di V_2: $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
È diagonalizzabile e $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. **(9 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 & 1 \\ k+1 & k-1 & k+1 & 2k \\ k+1 & 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
1	2	3	no	—
-1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -1, 1 \\ 2 \text{ se } k = -1, 1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 1$.

$\dim \text{Sol} = 2$ per $k = -1$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Altra soluzione particolare: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**3 febbraio 2021**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(9 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

   $p_A(t) = -t(t+2)^2$.
   $\mu(0) = m(0) = 1$, $\mu(-2) = 2, m(-2) = 1$.
   Base di V_0: $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; base di V_{-2}: $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
   Non è diagonalizzabile. Per esempio $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. **(9 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ k & k & 0 & k \\ 2k-2 & k & k-2 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
2	2	3	no	—
0	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 2 \\ 2 \text{ se } k = 0, 2. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 2$.

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Altra soluzione particolare:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$