Geometria e Algebra Appello del 15 settembre 2020

☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0
☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1
☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2
☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3
☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4
☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5
☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6
☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7
☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8
☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`linsysgatA`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ☐ Il sistema ha infinite soluzioni per qualunque B.
- ☐ Se $\operatorname{rg}(A|B) = 5$, allora il sistema è risolubile.
- ■ Se $\operatorname{rg} A = 5$ ed esiste una soluzione, allora essa è unica.
- ☐ Se il sistema è risolubile, allora ha infinite soluzioni.

Domanda [`linsysgatB`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 7 equazioni in 4 incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ☐ Se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$ il sistema ha un'unica soluzione.
- ☐ Se $\operatorname{rg}(A) = 4$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
- ■ Se $X = \mathbf{0}_n$ è una soluzione, allora $B = \mathbf{0}$.
- ☐ Se il sistema è risolubile per ogni B, allora $\operatorname{rg}(A) = 7$.

Domanda [`linsysgatC`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 5 equazioni in 4 incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}$ e $\operatorname{rg}(A|B) = 4$, allora il sistema ha infinite soluzioni.
- ☐ Se il sistema ammette una sola soluzione, allora $\operatorname{rg} A = 5$.
- ■ Se $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = 4$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
- ☐ Se il sistema è risolubile, allora $\dim \operatorname{Span}(A^1, A^2, A^3, A^4) = 4$.

Domanda [`linsysgatD`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 6 equazioni in 15 incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}$, allora il sistema ha solo la soluzione banale.
- ☐ Se $B = \mathbf{0}$ e $\operatorname{rg} A = 6$, allora il sistema ha una unica soluzione.
- ■ Se $\operatorname{rg} A = 6$, allora il sistema ha soluzione per ogni B.
- ☐ Se il sistema non è risolubile, allora $\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(A)$.

Domanda [`minvertgatA`] Stabilire quale delle seguenti matrici è invertibile.

■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & -5 & -7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`minvertgatB`] Stabilire quale delle seguenti matrici è invertibile.

■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 5 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`minvertgatC`] Stabilire quale delle seguenti matrici è invertibile.

■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Domanda [`minvertgatD`] Stabilire quale delle seguenti matrici è invertibile.

■ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`spanRCgatA`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

□ Se $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$, allora $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.

□ Se $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$.

■ Se $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 3$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$.

■ Se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$.

Domanda [`spanRCgatB`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

□ Se $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sono linearmente dipendenti, allora $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.

■ Se $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \leq 2$.

□ Se $\boldsymbol{u}_1 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$.

■ Se $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, allora $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ sono linearmente dipendenti.

Domanda [`spanRCgatC`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

□ Se $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1)$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$.

□ Se $\boldsymbol{u}_3 \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ sono linearmente indipendenti.

■ Se $\boldsymbol{u}_3 \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \geq 1$.

□ Se $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 1$.

Domanda [`spanRCgatD`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

■ Se $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$.

□ Se $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$.

■ Se $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1) = 1$ e $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 1$, allora $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1)$.

□ Se $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \neq \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

Domanda [ortgatA] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$ una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate del vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2/3\\5/21\\2/7\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4/\sqrt{6}\\5/\sqrt{21}\\4/\sqrt{14}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$

Domanda [ortgatB] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$ una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate del vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4/\sqrt{6}\\-7/\sqrt{21}\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}8\\3\\-2\end{pmatrix}$

Domanda [ortgatC] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\7\\4\end{pmatrix} \right\}$ una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate del vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2/11\\1/3\\4/33\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}2/\sqrt{11}\\2/\sqrt{6}\\8/\sqrt{66}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$

Domanda [ortgatD] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\7\\4\end{pmatrix} \right\}$ una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate del vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2/11\\1/2\\-1/22\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}2/\sqrt{11}\\3/\sqrt{6}\\-3/\sqrt{66}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}2\\-8\\-3\end{pmatrix}$

Domanda [coordvectorogonA] Data la base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} \right\}$, le coordinate di $\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$ su $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}8\\8\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}7/5\\11/5\\-1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}7/\sqrt{5}\\11/\sqrt{5}\\-2\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}2\\11\\-4\end{pmatrix}$

Domanda [coordvectorogonB] Data la base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} \right\}$, le coordinate di $\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ su $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}0\\10\\-2\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}4\\7/10\\-1/10\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4\\7/\sqrt{10}\\-1/\sqrt{10}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}$

Domanda [`coordvectorogonC`] Data la base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, le coordinate di $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ su $\mathcal{B}$ sono:

- ☐ $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix} 4/5 \\ -1 \\ 7/5 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 4/\sqrt{5} \\ -3 \\ 7/\sqrt{5} \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Domanda [`coordvectorogonD`] Data la base *ortogonale* di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, le coordinate di $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ su $\mathcal{B}$ sono:

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/10 \\ 13/10 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1/\sqrt{10} \\ 13/\sqrt{10} \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$