

Geometria e Algebra

Appello del 18 febbraio 2020

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartpone, ...) pena l'esclusione. Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

.....

.....

Domanda [opendefxxA] Dare la **definizione** di autovalore di una matrice quadrata $n \times n$.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [opendefxxB] Dare la **definizione** di autovettore di una matrice quadrata $n \times n$.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CATALOGO

Domanda [opendefxxC] Dare la **definizione** di matrice diagonalizzabile.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [opendefxxD] Dare la **definizione** di autospazio di una matrice quadrata $n \times n$.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [ranksysA] Dare un esempio di sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite che abbia un'unica soluzione, motivando la risposta.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CATALOGO

Domanda [ranksysB] Dare un esempio di sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite che abbia l'insieme delle soluzioni di dimensione 2, motivando la risposta. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [ranksysC] Dare un esempio di sistema lineare di 4 equazioni in 3 incognite che abbia l'insieme delle soluzioni di dimensione 1, motivando la risposta. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [ranksysD] Dare un esempio di sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite che abbia l'insieme delle soluzioni di dimensione 3, motivando la risposta. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [teospettA] ♣ Sia A una matrice **simmetrica** 3×3 . Sapendo che 1 è autovalore di A con autospazio $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \right\}$, stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- A possiede un autovalore $\lambda \neq 1$ con $V_\lambda = V_1^\perp$.
- La molteplicità algebrica di 1 è 3.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A .
- Esistono 3 autovettori di A ortogonali tra loro.

Domanda [teospettB] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3 tale che $A^T = A$, con autovalori $\{1, 2, 3\}$. Stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- A non è simile a una matrice diagonale.
- Esiste una base ortogonale di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di A .
- Gli autospazi V_1, V_2, V_3 sono due a due ortogonali.
- $\dim V_1 = 1$.

Domanda [teospettC] ♣ Sia A una matrice 3×3 tale che $A^T = A$, i cui unici autovalori sono 2 e 3. Stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- $\forall \mathbf{u} \in V_2, \forall \mathbf{w} \in V_3, \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$.
- $\dim V_2 + \dim V_3 = 2$.
- Entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 1.
- Esiste una matrice 3×3 invertibile M tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Domanda [teospettD] ♣ Sia A una matrice 3×3 tale che $A^T = A$, e 4 sia un autovalore di A con autospazio $V_4 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- Esiste una matrice ortogonale M tale che M^TAM è una matrice diagonale.
- Esiste una matrice diagonale M tale che M^TAM è ortogonale.
- A ha tre autovalori regolari.
- Se $X \in \mathbb{R}^3$ è un autovettore di A non proporzionale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora è ad esso ortogonale.

Domanda [geospazA] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di una *retta* nello spazio.

- $\begin{cases} x - y = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Domanda [geospazB] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di un *piano* nello spazio.

- $\begin{cases} x - y = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2t + s + 1 \\ y = t \\ z = t + s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + 6z = 1 \end{cases}$

Domanda [geomspazC] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di una *retta* nello spazio.

$\begin{cases} x + 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Domanda [geomspazD] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di un *piano* nello spazio.

$\begin{cases} x - y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x - 3y + 4z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = t + s + 1 \\ y = 3t \\ z = t - s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Domanda [sistemiA] ♣ Si supponga che $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $AX = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

$2X_1$ è soluzione del sistema $2AX = B$.

$X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$.

Il vettore $Y = X_2 - 3X_1$ appartiene a $\text{Ker } A$.

Se il rango di A è massimo, allora necessariamente $X_1 = X_2$.

Domanda [sistemiB] ♣ Si supponga che $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $AX = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

$-X_1$ è soluzione del sistema $AX = -B$.

$X_1 - 2X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$.

Il vettore $Y = 2X_2 - 2X_1$ appartiene a $\text{Ker } A$.

Se $\text{rg } A = n$, allora necessariamente $X_1 = X_2$.

Domanda [sistemiC] ♣ Si supponga che $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $AX = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

$2X_2$ è soluzione del sistema $AX = 2B$.

$X_1 + X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$.

Il vettore $Y = X_2 - X_1$ appartiene a $\text{Ker } A$.

Se il rango di A è massimo, allora non esistono altre soluzioni.

Domanda [sistemiD] ♣ Si supponga che $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $AX = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

$X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $AX = 3B$.

$2X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$.

Il vettore X_1 non appartiene a $\text{Ker } A$.

Se $\text{rg } A < n$, allora il sistema ha infinite soluzioni.

Domanda [matprodA] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB :

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [matprodB] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB :

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [matprodC] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB :

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [matprodD] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB :

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [orthogsfA] Sia $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale U^\perp :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Domanda [orthogsfB] Sia $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale U^\perp :

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [orthogsfC] Sia $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale U^\perp :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Domanda [orthogsfD] Sia $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene

al complemento ortogonale U^\perp :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [eigvalplainA] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $\dim \text{Ker } A = 1$.
- $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *non tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalplainB] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 + t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $m = 2$.
- $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 3$.
- $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *non tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalplainC] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 + t^2$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
- $\dim \text{Ker } A = 2$.
- $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalplainD] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
- $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $m = 1$.
- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *tutte* le sue radici sono reali.