| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 18 febbraio 2020 |
| --- | --- |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1-k & 2+k \\ k & 1+k & 1 & -k \\ k & k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xz + 2yt$.

   (a) Scrivere la matrice associata a $q$.

   (b) Scrivere $q$ in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice $M$ tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di $q$.

---

3. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta $r$ perpendicolare a $\pi$ passante da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ su $\pi$.

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da $\pi$.

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **18 febbraio 2020** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 2-k & 1+k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1 \\ k & k-1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = 4x^2 - y^2 + z^2 - 4t^2 + 4xz + 4yt$.

   (a) Scrivere la matrice associata a $q$.

   (b) Scrivere $q$ in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice $M$ tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di $q$.

---

3. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta $r$ perpendicolare a $\pi$ passante da $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ su $\pi$.

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ da $\pi$.

---

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **18 febbraio 2020** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} -2-k & 3+k & 1 & 2+k \\ 1 & 2+k & 0 & 2+k \\ 4+k & 1 & -1-k & 2+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4xz + 4yt$.

   (a) Scrivere la matrice associata a $q$.

   (b) Scrivere $q$ in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice $M$ tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di $q$.

---

3. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta $r$ perpendicolare a $\pi$ passante da $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ su $\pi$.

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ da $\pi$.

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **18 febbraio 2020** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k & k-2 & -1-k & -1 \\ k & -1 & 0 & k \\ k & -k & -1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = -4x^2 - 4y^2 - z^2 - t^2 + 4xz + 4yt$.

   (a) Scrivere la matrice associata a $q$.

   (b) Scrivere $q$ in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice $M$ tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di $q$.

---

3. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta $r$ perpendicolare a $\pi$ passante da $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ su $\pi$.

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ da $\pi$.