CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 gennaio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k+1 & -k & 1 & 2k+1 \\ 2k & -2k & -k & 0 \\ -k+1 & 2k & k+2 & 2k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $x + y - z = 6$ e il piano π_2 di equazione $x - y + z = 4$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{2}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si determini il coseno dell'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

(a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 gennaio 2020
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k+1 & -k & 1 & k \\ 2k & -k+1 & -k & k+1 \\ -k+1 & 2k & 1 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Determinare tutte le soluzioni per $k = 1$.

---

2. **(8pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $x + y - 2z = 10$ e il piano π_2 di equazione $x + y + z = 4$.

(a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

(c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{2}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(d) Si determini l'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$..

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 gennaio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & -k & 2 & 2k+2 \\ 0 & -2k & -k & 0 \\ k+2 & 2k & k+4 & 2k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ 2k+2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

   (d) Determinare tutte le soluzioni per $k = -1$.

---

2. **(8 pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $x - 2y + 5z = 2$ e il piano π_2 di equazione $x - 2y - 5z = 2$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{5}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si determini il coseno dell'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$..

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 6 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**27 gennaio 2020**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k-1 & 1-k & 1 & k-1 \\ 2k-2 & 2-k & 1-k & k \\ 2-k & 2k-2 & 1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k-2 \\ 3k-3 \\ 2k-1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $-5x + y - 2z = -4$ e il piano π_2 di equazione $5x + 2y - 4z = 7$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{5}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si determini il coseno dell'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$..

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.