

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & -2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di k :
- (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:
- (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r' .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π .

3. (8pt) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X$.

- (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m .

 - (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

 - (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

 - (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & 1-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k :
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:
- Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B .
- Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r' .
- Si calcoli la distanza dell'origine da π .

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X$.

- (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m .

 - (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

 - (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

 - (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-3 & 2k-3 & 2k-3 \\ k-1 & 1-k & k-1 & 1 \\ 1-k & 3-k & 3-2k & 2-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di k :
- (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:
- (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r' .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π .

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X$.

- (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m .

 - (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

 - (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

 - (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ Scrivere in modo **LEGGIBILE** nome e cognome! ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} -k & 3-k & 5-2k & 5-2k \\ k-3 & 3-k & 3-k & 1 \\ k-1 & k-3 & 2k-5 & 2k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di k :
- (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:
- (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B .
- (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r' .
- (d) Si calcoli la distanza dell'origine da π .

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^T A X$.

- (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m .

 - (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

 - (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

 - (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.
-