Geometria e Algebra Appello del 12 settembre 2019

☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**
☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**
☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**
☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**
☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**
☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**
☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**
☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**
☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**
☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**

$\longleftarrow$ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`openquestdeflingenA`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ in $\mathbb{R}^3$, cosa significa che essi sono un **sistema di generatori di** $\mathbb{R}^3$?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenB`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^4$, cosa significa che essi sono **linearmente indipendenti**?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenC`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^4$, cosa significa che essi sono **linearmente dipendenti**?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenD`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ in $\mathbb{R}^3$, cosa significa che essi **non generano** $\mathbb{R}^3$?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openoperA`] Si enunci il teorema spettrale.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openoperB`] Si dia la **definizione** di matrice diagonalizzabile. [Attenzione si chiede la definizione, non i criteri per stabilire la diagonalizzabilità]

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [openoperC] Si dia la **definizione** di matrici simili. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Domanda [openoperD] Si dia la definizione di molteplicità geometrica di un autovalore λ di un operatore lineare $L : V \to V$. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Domanda [linearapplixA] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, calcolare $L\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \ldots$

- ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
- ■ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo.

Domanda [linearapplixB] Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, calcolare $L\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \ldots$

- ■ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
- ☐ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo.

Domanda [linearapplixC] Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, calcolare $L\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \ldots$

- ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$
- ☐ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo.

Domanda [linearapplixD] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, calcolare $L\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = ...$

- ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$
- ☐ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo.

Domanda [linsysA] ♣ Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 5 equazioni in 8 incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ☐ Il sistema ha infinite soluzioni per qualunque B.
- ☐ Se $\text{rg}(A|B) = 5$, allora il sistema è risolubile.
- ☐ Se $\text{rg}\,A = 5$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
- ■ Se $B = \mathbf{0}$ il sistema è risolubile.

Domanda [linsysB] ♣ Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ■ Se $\text{rg}\,A = \text{rg}(A|B)$ il sistema ha infinite soluzioni.
- ☐ Se $\text{rg}(A|B) = 4$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
- ☐ Se $B = \mathbf{0}$, allora il sistema ammette solo la soluzione banale $X = \mathbf{0}_n$.
- ■ Se $\text{rg}\,A = 4$, allora il sistema è risolubile per ogni B.

Domanda [linsysC] ♣ Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 5 equazioni in 4 incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ■ Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg}\,A = 4$, allora il sistema ha solo la soluzione banale.
- ■ Se il sistema ammette una sola soluzione soluzione allora $\text{rg}\,A = 4$.
- ☐ Se $\text{rg}(A|B) = 5$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
- ☐ Se il sistema è risolubile allora $\text{rg}\,A = 4$.

Domanda [linsysD] ♣ Sia $A\,X = B$ un sistema lineare di 6 equazioni in 5 incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}$, allora il sistema ha solo la soluzione banale.
- ■ Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg}\,A = 4$, allora il sistema ha sicuramente infinite soluzioni.
- ☐ Se $\text{rg}\,A = 5$ il sistema ha un'unica soluzione per ogni B.
- ■ Se il sistema ha un'unica soluzione, allora $\text{rg}(A|B) = 5$.

Domanda [sottospaziA] ♣ Siano $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\w\end{pmatrix}$ le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^5$. Quali fra i seguenti sistemi di equazioni individuano un sottospazio di dimensione 3?

- ☐ $\begin{cases} x+y=0 \\ y+3t=0 \\ t-w=0 \end{cases}$
- ■ $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$
- ■ $\begin{cases} x+y+z+t+w=0 \\ x-y-2z-3t=0 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} x-y-2z+t+w=0 \\ -2x+2y+4z-2t-2w=0 \end{cases}$

Domanda [`sottospaziB`] ♣ Siano $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^5$. Quali fra i seguenti sistemi di equazioni individuano un sottospazio di dimensione 2?

■ $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 3t = 0 \\ t - w = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x - y - 2z - 3t = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x - y - 2z + t + w = 0 \\ x + y + 2z + w + 0 \end{cases}$

Domanda [`sottospaziC`] ♣ Siano $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^5$. Quali fra i seguenti sistemi di equazioni individuano un sottospazio di dimensione 3?

□ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - t = 0 \\ t - w = 0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2z - 3t = 0 \\ 2x + 2y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Domanda [`sottospaziD`] ♣ Siano $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^5$. Quali fra i seguenti sistemi di equazioni individuano un sottospazio di dimensione 2?

■ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - t = 0 \\ t - w = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2z - 3t = 0 \\ 2x + 2y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$

Domanda [`pianobA`] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y + z = 0$?

■ $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Domanda [`pianobB`] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x + y + z = 0$?

■ $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Domanda [`pianobC`] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y - z = 0$?

■ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Domanda [`pianobD`] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y + z = 0$?

■ $\begin{cases} x - z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Domanda [`determinanteabcA`] Siano a e b due numeri reali e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ $\det A = a^2 - b$.

☐ A è invertibile per qualunque scelta di a e b.

■ $\det A = a^2 - ab$.

☐ Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ allora A è invertibile.

Domanda [`determinanteabcB`] Siano a e b due numeri reali e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

■ A è non invertibile per qualunque scelta di a e b.

☐ A è invertibile per qualunque scelta di a e b.

☐ $\det A = a^2 - ab$.

☐ Se $\operatorname{rank} A = 2$, allora $b = 0$.

Domanda [`determinanteabcC`] Sia x un numero reale e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 0 & x \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ Per qualunque scelta di x la matrice A è invertibile.

☐ Per $x = 1$, $\operatorname{rank} A = 2$.

■ $\det A = -x^2$.

☐ Se $x = 0$, $\operatorname{rank} A = 1$.

Domanda [`determinanteabcD`] Sia x un numero reale e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & x & x \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

■ La matrice A è invertibile solo se $x \neq 0$.

☐ Per $x = 1$, $\operatorname{rank} A = 2$.

☐ $\det A = x^2$.

☐ Se $x = 0$, $\operatorname{rank} A = 1$.

Domanda [`quadricA`] ♣ Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica con matrice associata $A = (a_{ij})$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

☐ q è in forma canonica se $a_{ii} = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

☐ Se q è indefinita allora l'unico vettore $X \in \mathbb{R}^n$ per cui $q(X) = 0$ è $X = \mathbf{0}_n$.

☐ Se $a_{11} > 0$, allora q è definita positiva.

■ q è definita positiva se e solo se $\lambda_i > 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Domanda [`quadricB`] ♣ Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica con matrice associata $A = (a_{ij})$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

■ q è in forma canonica se A è diagonale.

■ Se l'unico vettore $X \in \mathbb{R}^n$ per cui $q(X) = 0$ è $X = \mathbf{0}_n$, allora X è definita positiva o definita negativa.

☐ q è definita positiva se e solo se $a_{ij} > 0$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$.

☐ Se uno dei λ_i è nullo allora q è o semidefinita positiva o semidefinita negativa.

Domanda [`quadricC`] ♣ Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica con matrice associata $A = (a_{ij})$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

- ■ Il cambio di base per mettere q in forma canonica è dato da una qualunque base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.
- □ Se q è definita positiva allora non c'è nessun vettore in $\mathbb{R}^n$ tale che $q(X) = 0$.
- ■ Se q è definita positiva allora $a_{11} > 0$.
- ■ Se q è semidefinita positiva allora uno dei λ_i è nullo.

Domanda [`quadricD`] ♣ Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica con matrice associata $A = (a_{ij})$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

- □ Il cambio di base per mettere q in forma canonica è dato da una qualunque base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.
- □ Se q è semidefinita positiva allora l'unico vettore per cui $q(X) = 0$ è il vettore nullo.
- ■ Se $a_{11} > 0$ allora q non è definita negativa.
- ■ Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ allora q è indefinita.