Geometria e Algebra Appello del 23 luglio 2019

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`openmatriciA`] Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, dire se è definito il prodotto AB e in caso affermativo calcolarlo.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openmatriciB`] Date $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, dire se è definito il prodotto AB e in caso affermativo calcolarlo.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openmatriciC`] Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dire se è definito il prodotto AB e in caso affermativo calcolarlo.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openmatriciD`] Date $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, dire se è definito il prodotto AB e in caso affermativo calcolarlo.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openvectA`] Sia dato uno spazio vettoriale V e una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ di V. Cosa sono le coordinate di un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$?

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openvectB`] Sia dato uno spazio vettoriale V. Come è definita la dimensione di V?

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`openvectC`] Sia dato uno spazio vettoriale V e una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n\}$ di V. In quanti modi è possibile ottenere un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$? Si motivi adeguatamente la risposta.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`openvectD`] Si enunci il teorema della base. Ossia: cosa hanno in comune tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale?

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`grasslidiaA`] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$; sia $\dim U = 5$ e $\dim V = 3$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

■ $\dim(U + V) \geq 3$.

■ U e V non possono essere in somma diretta.

☐ $\dim(U \cap V) < 3$.

☐ V è sottoinsieme di U.

Domanda [grasslidiaB] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- □ $\dim(U \cap V) = 2$.
- ■ $\dim(U \cap V) \geq 1$.
- ■ $\dim(U + V) \geq 4$.
- □ U e V sono in somma diretta.

Domanda [grasslidiaC] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- □ $U \subset V$.
- □ $U + V = \mathbb{R}^5$.
- □ $\dim(U \cap V) = 1$.
- ■ Se $\dim(U + V) = 5$ allora $\dim(U \cap V) = 0$.

Domanda [grasslidiaD] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^6$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- □ $\dim(U \cap V) = 0$.
- □ $\dim(U \cap V) = 2$.
- ■ Se U non è contenuto in V allora $\dim(U \cap V) < 2$.
- ■ U e V non sono in somma diretta.

Domanda [VorthogA] ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = x - t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [VorthogB] ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - t = x + z = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Domanda [VorthogC] ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid y + z - t = x - 2t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [VorthogD] ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - t = z + t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Domanda [`inversixA`] Posto $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, si dica quali delle seguenti affermazioni è vera:

- ☐ $A^{-1} = A^T$
- ☐ La matrice A non possiede inversa.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
- ■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Domanda [`inversixB`] Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, si dica quali delle seguenti affermazioni è vera:

- ☐ $A^{-1} = A^T$
- ■ La matrice A non possiede inversa.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Domanda [`inversixC`] Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, si dica quali delle seguenti affermazioni è vera:

- ☐ $A^{-1} = A^T$
- ☐ La matrice A non è invertibile
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- ■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Domanda [`inversixD`] Posto $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, si dica quali delle seguenti affermazioni è vera:

- ☐ $A^{-1} = A^T$
- ■ La matrice A non possiede inversa.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda [`detercolA`] ♣ Sia $A = \left(A^1 | A^2 | A^3\right)$ una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -2$ si dica quali delle seguenti uguaglianze sono *sempre* vere:

- ■ $\det(A^2|A^1|A^3) = 2$.
- ☐ $\det(A^1|A^2|2A^3) = -16$.
- ■ $\det(A^1|A^1 + A^2|A^3) = -2$.
- ☐ $\det(3A) = -6$.

Domanda [`detercolB`] ♣ Sia $A = \left(A^1 | A^2 | A^3\right)$ una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -3$ si dica quali delle seguenti uguaglianze sono *sempre* vere:

- ■ $\det(A^1|2A^2|A^3) = -6$.
- ☐ $\det(3A^1|3A^2|3A^3) = -9$.
- ■ $\det(A^1|A^2|A^3 - A^1) = -3$.
- ■ $\det(2A) = -24$.

Domanda [`detercolC`] ♣ Sia $A = \left(A^1 | A^2 | A^3\right)$ una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -1$ si dica quali delle seguenti uguaglianze sono *sempre* vere:

- ☐ $\det(A^1|A^1 + A^2|A^3) = -2$.
- ☐ $\det(-A^1|A^2| - A^3) = 1$.
- ■ $\det(A^1|2A^2|3A^3) = -6$.
- ☐ $\det(4A) = -4$.

Domanda [`detercolD`] ♣ Sia $A = \left(A^1|A^2|A^3\right)$ una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -2$ si dica quali delle seguenti uguaglianze sono *sempre* vere:

- ■ $\det(A^1|A^3|A^2) = 2$.
- ■ $\det(A^1|A^1 - A^2|A^3) = 2$.
- □ $\det(2A^1|A^2|A^3) = -8$.
- □ $\det(4A) = -8$.

Domanda [`sistemiA`] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

- □ $2X_1$ è soluzione del sistema $2A\,X = B$
- ■ $X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$
- □ Il vettore $Y = X_2 - 3X_1$ appartiene a $\operatorname{Ker} A$
- □ Se il rango di A è massimo, allora necessariamente $X_1 = X_2$

Domanda [`sistemiB`] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

- ■ $-X_1$ è soluzione del sistema $A\,X = -B$
- □ $X_1 - 2X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$
- ■ Il vettore $Y = 2X_2 - 2X_1$ appartiene a $\operatorname{Ker} A$
- ■ Se $\operatorname{rg} A = n$, allora necessariamente $X_1 = X_2$

Domanda [`sistemiC`] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

- ■ $2X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = 2B$
- □ $X_1 + X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$
- ■ Il vettore $Y = X_2 - X_1$ appartiene a $\operatorname{Ker} A$
- □ Se $\operatorname{rg} A = n$, allora $X_1 = 0$

Domanda [`sistemiD`] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

- ■ $X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = 3B$
- □ $2X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$
- ■ Il vettore X_1 non appartiene a $\operatorname{Ker} A$
- ■ Se $\operatorname{rg} A < n$, allora è possibile che sia $X_1 \neq X_2$

Domanda [`analiticA`] Si determini quale fra le seguenti espressioni sono equazioni **cartesiane** della retta r passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ e parallela al vettore di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- □ $x + y + z = 1$
- ■ $\begin{cases} x - y = 2 \\ z - y = 2 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$
- □ $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Domanda [`analiticB`] Si determini quale fra le seguenti espressioni sono equazioni **cartesiane** del piano π passante per i punti di coordinate $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

■ $x+y+z=1$

□ $\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1+2t+2s \qquad t,s\in\mathbb{R}\\ z=1-2s\end{cases}$

□ $\begin{cases}x-y=2\\ z-y=2\end{cases}$

□ $x+y+z=0$

Domanda [`analiticC`] Si determini quale fra le seguenti espressioni sono equazioni **cartesiane** della retta r passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ e il punto di coordinate $\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

□ $x+y+z=1$

□ $\begin{cases}x=1-t\\ y=-1+t \qquad t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}$

■ $\begin{cases}x+y=0\\ z+y=0\end{cases}$

□ $\begin{cases}x-y=2\\ z-y=2\end{cases}$

Domanda [`analiticD`] Si determini quale fra le seguenti espressioni sono equazioni **cartesiane** del piano π passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e normale al vettore $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

■ $x-2y+z=0$

□ $x+y+z=0.$

□ $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t \qquad t\in\mathbb{R}\\ z=1+t\end{cases}$

□ $\begin{cases}x-z=0\\ x-y=3\end{cases}$