CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3+k & k & 4 & -3-k \\ k-1 & -3k & 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k \\ 4+k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O.

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k-2 & -3k & k-2 \\ 6+k & 8 & k & 6+k \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3k \\ k-5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O.

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 7+2k & 2k+1 & -7-2k & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2k-1 & -6k-3 & 1-2k & 4k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+k \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O.

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 luglio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ k & -k & 2+2k & -3k-6 \\ 8+k & -8-k & 8 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-k \\ -3 \\ 3-3k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O.

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π.
