

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>23 luglio 2019</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3+k & k & 4 & -3-k \\ k-1 & -3k & 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k \\ 4+k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:
- (d) Sia  $k = 1$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
0	2	2	sì	2
3/2	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 3/2 \\ 2 & \text{se } k = 0, 3/2. \end{cases}$$

Risolubile per  $k \neq 3/2$ ,

$\dim \text{Sol} = 2$  per  $k = 0$ .

Soluzione per  $k = 1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di  $A$
- (b) Determinare gli autovalori di  $A$  specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- (c) Determinare una base di ciascun autospazio di  $A$ .
- (d) Discutere se esiste una matrice invertibile  $N$  tale che  $N^{-1}AN$  è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice  $B$  che abbia lo stesso polinomio caratteristico di  $A$  ma che non sia simile ad  $A$ .

(a)  $P_A(t) = -t(1+t)^2 = -t^3 - 2t^2 - t$

(b) Autovalori di  $A$ : 0 con  $\mu = m = 1$ , -1 con  $\mu = m = 2$ .

(c)  $V_0(A) = \{x - z = y - 3x = 0\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $V_{-1}(A) = \{x - y + 3z = 0\} =$   
 $\text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

(d) Sì  $A$  è diagonalizzabile:  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

3. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

- (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta  $r$  passante per i punti  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ t+1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2x + 2 = 0. \end{cases}$$

- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  ortogonale ad  $r$  e passante per  $O$ .  $\pi: x + 2y + z = 0$ .

- (c) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P_0$  su  $\pi$ , e la proiezione ortogonale di  $P_1$  su  $\pi$ .  $P'_0 = P'_1 = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ .

- (d) Calcolare la distanza di  $P_0$  da  $\pi$ .  $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k-2 & -3k & k-2 \\ 6+k & 8 & k & 6+k \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3k \\ k-5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:
- (d) Sia  $k = 2$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
3	2	2	sì	2
0	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 3 \\ 2 & \text{se } k = 0, 3. \end{cases}$$

Risolubile per  $k \neq 0$ ,

Non c'è nessun valore di  $k$  per cui  $\dim \text{Sol} = 3$ .

Soluzione per  $k = 2$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 17/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di  $A$
- (b) Determinare gli autovalori di  $A$  specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- (c) Determinare una base di ciascun autospazio di  $A$ .
- (d) Discutere se esiste una matrice invertibile  $N$  tale che  $N^{-1}AN$  è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice  $B$  che abbia lo stesso polinomio caratteristico di  $A$  ma che non sia simile ad  $A$ .

(a)  $P_A(t) = -t^3 + t^2$

(b) Autovalori di  $A$ : 0 con  $\mu = 2$ ,  $m = 1$ , 1 con  $\mu = m = 1$ .

(c)  $V_0(A) = \{y - 2x = z - 3x = 0\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  $V_1(A) = \{x - y = 2x - z = 0\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(d) No  $A$  è non diagonalizzabile:  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

3. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta

$r$  passante per i punti  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t-1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  ortogonale ad  $r$  e passante per  $O$ .  $\pi: x + y + 2z = 0$ .

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P_0$  su  $\pi$ , e la proiezione ortogonale di

$P_1$  su  $\pi$ .  $P'_0 = P'_1 = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 1/6 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ .

(d) Calcolare la distanza di  $P_0$  da  $\pi$ .  $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

---

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>23 luglio 2019</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} 7+2k & 2k+1 & -7-2k & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2k-1 & -6k-3 & 1-2k & 4k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+k \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:
- (d) Sia  $k = -1$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
1	2	2	sì	2
-1/2	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 1, -1/2 \\ 2 & \text{se } k = 1, -1/2. \end{cases}$$

Risolubile per  $k \neq -1/2$ ,

$\dim \text{Sol} = 2$  per  $k = 1$ .

Soluzione per  $k = -1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di  $A$
- (b) Determinare gli autovalori di  $A$  specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- (c) Determinare una base di ciascun autospazio di  $A$ .
- (d) Discutere se esiste una matrice invertibile  $N$  tale che  $N^{-1}AN$  è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice  $B$  che abbia lo stesso polinomio caratteristico di  $A$  ma che non sia simile ad  $A$ .

(a)  $P_A(t) = -t^2(t - 2) = -t^3 + 2t^2$

(b) Autovalori di  $A$ : 0 con  $\mu = m = 2$ , 2 con  $\mu = m = 1$ .

(c)  $V_2(A) = \{x - 2z = y - 3z = 0\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $V_0(A) = \{x - y + 3z = 0\} =$   
 $\text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

(d) Sì  $A$  è diagonalizzabile:  $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---



3. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

- (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta  $r$  passante per i punti  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  ortogonale ad  $r$  e passante per  $O$ .  $\pi: 2x + y + 2z = 0$ .
- (c) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P_0$  su  $\pi$ , e la proiezione ortogonale di  $P_1$  su  $\pi$ .  $P'_0 = P'_1 = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 1/9 \\ -4/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$ .
- (d) Calcolare la distanza di  $P_0$  da  $\pi$ .  $\frac{4}{3}$ .
-

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>23 luglio 2019</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ k & -k & 2+2k & -3k-6 \\ 8+k & -8-k & 8 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-k \\ -3 \\ 3-3k \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:
- (d) Sia  $k = 0$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$k$	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
-2	2	2	sì	2
1	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 1, -2 \\ 2 & \text{se } k = 1, -2. \end{cases}$$

Risolubile per  $k \neq 1$ ,

Non c'è nessun valore di  $k$  per cui  $\dim \text{Sol} = 3$ .

Soluzione per  $k = 0$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -3 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di  $A$
- (b) Determinare gli autovalori di  $A$  specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- (c) Determinare una base di ciascun autospazio di  $A$ .
- (d) Discutere se esiste una matrice invertibile  $N$  tale che  $N^{-1}AN$  è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice  $B$  che abbia lo stesso polinomio caratteristico di  $A$  ma che non sia simile ad  $A$ .

(a)  $P_A(t) = -t^2(t - 2) = -t^3 + 2t^2$

(b) Autovalori di  $A$ : 0 con  $\mu = 2$ ,  $m = 1$ , 2 con  $\mu = m = 1$ .

(c)  $V_2(A) = \{x - y = 2x - z = 0\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$V_0(A) = \{3x - y = 4x - z = 0\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

(d) No,  $N$  non esiste perché  $A$  non è diagonalizzabile.  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

- (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta  $r$  passante per i punti  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 2t \\ t - 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - 3z - 4 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  ortogonale ad  $r$  e passante per  $O$ .  $\pi: 3x + 2y + z = 0$ .
- (c) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P_0$  su  $\pi$ , e la proiezione ortogonale di  $P_1$  su  $\pi$ .  $P'_0 = P'_1 = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 4/7 \\ -2/7 \\ -8/7 \end{pmatrix}$ .

(d) Calcolare la distanza di  $P_0$  da  $\pi$ .  $\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ .

---