CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	2 luglio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 1-k & -1-2k & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k \\ 0 \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$L\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\\4\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Im} L)^{\perp}$, complemento ortogonale di $\operatorname{Im} L$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 luglio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ -1-k & k & 2-k & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k+2 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Ker} L)^\perp$, complemento ortogonale di $\operatorname{Ker} L$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 luglio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ k & 2 & -3+2k & -1 \\ 1 & 0 & 2 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3+2k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Im} L)^\perp$, complemento ortogonale di $\operatorname{Im} L$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 luglio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -k & 3-k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Ker} L)^\perp$, complemento ortogonale di $\operatorname{Ker} L$: