CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 febbraio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2 & 2-k & 2+k \\ -2 & k+2 & 4-k & 2+2k \\ -k & 2k & k & 3k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 2+k \\ k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 febbraio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+4 & 2k+4 & k & k+4 \\ -k-4 & -4 & k & -k-4 \\ k+8 & 3k+8 & k & 3k+8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k+4 \\ -3k-4 \\ 2k+8 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = -2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 febbraio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k+1 & k+1 & k-3 \\ 3-k & 2 & 3+k & 2k-4 \\ 2-2k & 1-k & 1-k & 3k-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-k \\ 3-k \\ 1-k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 febbraio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

   (c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

   (d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 4k-4 & 2k \\ k-2 & -k & -4 & -2k \\ k-2 & k+2 & 6k-4 & 6k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4k-4 \\ -6k+8 \\ 4k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: