CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 7 \\ -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, ma che non sia simile ad A.

$p_A(t) = -t^3 + 7t^2 - 12t.$

Autovalori: $0, 3, 4$. $V_0 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 13 \end{pmatrix})$, $V_3 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $V_4 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix})$

$$N = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 25 & 2 & 3 \\ 13 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0 \right\}.$$

   (a) Si determini la dimensione di W e di $W^\perp$.

   (b) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1$ di W.

   (c) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di $W^\perp$

   (d) Si determinino le coordinate del primo vettore della base canonica $\boldsymbol{e}_1$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$.

$\dim W = \dim W^{\perp} = 2$

$\mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \}$

$\mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \}$

$[\boldsymbol{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ -1/70 \\ 1/4 \\ -3/20 \end{pmatrix}.$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ k & -1 & 2k+1 & -3-k & -1 \\ 1+k & k & k+2 & 2k-1 & 1+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	3
-1	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	2

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, -1 \\ 2 \text{ se } k = 0, -1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -1$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k \neq 0, -1$. Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s, p \in \mathbb{R}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, ma che non sia simile ad A.

$p_A(t) = -t^3 + 8t^2 - 16t$.

Autovalori: $0, 4, 4$. $V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$, $V_4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y = x - y + 2z - t = 2x + y - z - t = 0 \right\}.$$

   (a) Si determini la dimensione di W e di $W^\perp$.

   (b) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1$ di W.

   (c) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di $W^\perp$.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ appartenga a $W^\perp$.

$\dim W = 1$ $\dim W^{\perp} = 3$

$\mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$

$\mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \}$

Il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a $W^{\perp}$.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1+k & k-1 & k & 2k-3 & k \\ 2k-1 & -1 & k-1 & -2-k & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ 3+k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
0	2	3	no	–
1	2	2	sì	3
altrim.	3	3	sì	2

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k \neq 0, 1$. Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s, p \in \mathbb{R}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, ma che non sia simile ad A.

$p_A(t) = -t^3 + t^2$.

Autovalori: $0, 0, 1$. $V_0 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $V_1 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix})$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z - t = 2x - y - 3t = 0 \right\}.$$

   (a) Si determini la dimensione di W e di $W^\perp$.

   (b) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1$ di W.

   (c) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di $W^\perp$

   (d) Si determinino le coordinate del secondo vettore della base canonica $\boldsymbol{e}_1$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$.

$\dim W = \dim W^\perp = 2$

$\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$

$\mathcal{B}_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\}$

$[\boldsymbol{e}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/14 \\ 1/35 \\ -1/4 \\ 1/20 \end{pmatrix}.$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1+k & -4-k & 3+2k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ k+2 & 2k+1 & k+3 & k+1 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+k \\ 2+2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-2	2	3	no	–
-1	2	2	sì	3
altrim.	3	3	sì	2

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -2, -1 \\ 2 \text{ se } k = -2, -1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -2$, $\dim \text{Sol} = 3$ per $k = -1$. Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s, p \in \mathbb{R}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, ma che non sia simile ad A.

$p_A(t) = -t^3 - 4t^2 - 4t.$

Autovalori: $-2, -2, 0$. $V_{-2} = \text{Span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix})$, $V_0 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

$$N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, z + t = 2x - y + z + t = x + y - 2z + t = 0 \right\}.$$

   (a) Si determini la dimensione di W e di $W^\perp$.

   (b) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_1$ di W.

   (c) Si determini una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di $W^\perp$.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartenga a $W^\perp$.

$\dim W = 1 \ \dim W^{\perp} = 3$

$\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

$\mathcal{B}_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\}$

Il vettore $\boldsymbol{v}$ **non** appartiene a $W^{\perp}$.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 3+2k & k+4 & k+2 & k+3 & k+3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -5-k & 2k+5 & -1 & k+2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2+2k \\ 1+k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-3	2	3	no	–
-2	2	2	sì	3
altrim.	3	3	sì	2

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -2, -3 \\ 2 \text{ se } k = -2, -3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -3$, $\dim \text{Sol} = 3$ per $k = -2$. Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s, p \in \mathbb{R}$$
