Geometria e Algebra Appello del 20 settembre 2018

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`opendiagA`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 **qualunque**. Sapendo che 1 e 3 sono i suoi autovalori, e che $V_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + 2z = 0\}$ è l'autospazio associato al primo autovalore, è possibile stabilire se la matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendiagB`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 **qualunque**. Sapendo che 2 e 4 sono i suoi **unici** autovalori, e che $V_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 2y + z = 0\}$ è l'autospazio associato al primo autovalore, è possibile stabilire se la matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendiagC`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 **qualunque**. Sapendo che 3 e -2 sono i suoi autovalori, e che $V_3 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ è l'autospazio associato al primo autovalore, è possibile stabilire se la matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendiagD`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 **qualunque**. Sapendo che 4 e -1 sono i suoi **unici** autovalori, e che $V_4 = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ è l'autospazio associato al primo autovalore, è possibile stabilire se la matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestsistemicterA`] Sia A una matrice $k \times n$. Definire $\operatorname{Ker} A$. Dare un esempio di una matrice 2×4 con $\dim \operatorname{Ker} A = 3$. Motivare adeguatamente la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [openquestsistemicterB] Sia A una matrice $k \times n$. Definire $\operatorname{Ker} A$. Dare un esempio di una matrice 4×2 con $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$. Motivare adeguatamente la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [openquestsistemicterC] Enunciare il teorema di Rouché-Capelli. Esistono sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite privi di soluzioni? Fornire un esempio in caso affermativo o motivare adeguatamente la risposta in caso negativo.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [openquestsistemicterD] Enunciare il teorema di Rouché-Capelli. Se il sistema $AX = B$ è risolubile, il sistema $AX = 3B$ è risolubile oppure no? Motivare adeguatamente la risposta.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [`determinanteA`] ♣ Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sapendo che $\det A = 11$ e sfruttando le proprietà del determinante, si dica quali delle seguenti uguaglianze è vera:

☐ $\det \begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 \\ 10 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 22.$

☐ $\det \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -11.$

■ $\det \begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 22.$

■ $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -11.$

Domanda [`determinanteB`] ♣ Posto $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sapendo che $\det A = 10$ si dica quali delle seguenti uguaglianze è vera:

■ $\det \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 10$

■ $\det \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 15 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 30.$

☐ $\det \begin{pmatrix} 6 & 18 & 9 \\ 15 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 30.$

☐ $\det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 10.$

Domanda [`determinanteC`] ♣ Posto $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sapendo che $\det A = 9$ e sfruttando le proprietà del determinante, si dica quali delle seguenti uguaglianze è vera:

☐ $\det \begin{pmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 36/3.$

■ $\det \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 10 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 72.$

☐ $\det \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 10$

■ $\det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -9.$

Domanda [`determinanteD`] ♣ Posto $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sapendo che $\det A = 8$ e sfruttando le proprietà del determinante, si dica quali delle seguenti uguaglianze è vera:

■ $\det \begin{pmatrix} -8 & 6 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -16.$

■ $\det \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 8.$

☐ $\det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 8.$

■ $\det \begin{pmatrix} -8 & -12 & -6 \\ -10 & -2 & -4 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -64.$

Domanda [`morthogA`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Domanda [`morthogB`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Domanda [`morthogC`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

■ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Domanda [morthogD] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

□ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Domanda [quadformA] Si consideri la forma quadratica $q(x,y,z) = x^2 + 4xz + y^2 + z^2$. Si stabilisca il segno di q.

□ semidefinita positiva □ semidefinita negativa ■ non definita
□ definita positiva □ definita negativa

Domanda [quadformB] Si consideri la forma quadratica $q(x,y,z) = x^2 - 2yz + y^2 + z^2$. Si stabilisca il segno di q.

■ semidefinita positiva □ semidefinita negativa □ non definita
□ definita positiva □ definita negativa

Domanda [quadformC] Si consideri la forma quadratica $q(x,y,z) = 2x^2 - 2yz + 2y^2 + 2z^2$. Si stabilisca il segno di q.

□ semidefinita positiva □ semidefinita negativa □ non definita
■ definita positiva □ definita negativa

Domanda [quadformD] Si consideri la forma quadratica $q(x,y,z) = -2x^2 + 4xz - 2y^2 - 2z^2$. Si stabilisca il segno di q.

□ semidefinita positiva ■ semidefinita negativa □ non definita
□ definita positiva □ definita negativa

Domanda [quadformE] Si consideri la forma quadratica $q(x,y,z) = -2x^2 + 2xy - 2y^2 - 2z^2$. Si stabilisca il segno di q.

□ semidefinita positiva □ semidefinita negativa □ non definita
□ definita positiva ■ definita negativa

Domanda [grassneggA] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^6$; sia $\dim U = 5$ e $\dim V = 3$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

□ $\dim(U+V) = 3$. ■ $5 \leq \dim(U+V) \leq 6$
□ $\dim(U \cap V) \geq 5$. □ V è sottoinsieme di U

Domanda [grassneggB] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

■ $\dim(U+V) \geq 4$. □ $\dim(U \cap V) \geq 3$.
□ $\dim(U \cap V) = 2$. ■ U e V *non* sono in somma diretta.

Domanda [grassneggC] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$. Sapendo U che **non è contenuto** in V, quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

□ $\dim(U+V) = 4$. □ U e V sono complementari.
■ $\dim(U \cap V) = 1$. ■ $U + V = \mathbb{R}^5$

Domanda [grassneggD] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^6$; sia $\dim U = 3$ e $\dim V = 5$. Sapendo U che **non è contenuto** in V, quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- ☐ $\dim(U+V) = 5$.
- ■ $U + V = \mathbb{R}^6$.
- ☐ U e V sono in somma diretta: $U \oplus V$.
- ■ $\dim(U \cap V) = 2$.

Domanda [coodivettoreA] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$. Allora

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}10/13\\-21/13\\14/13\end{pmatrix}$.
- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-9\\-2\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

Domanda [coodivettoreB] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Allora

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-5/13\\17/13\\-7/13\end{pmatrix}$.
- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}4\\11\\6\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}7\\11\\-6\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Domanda [coodivettoreC] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$. Allora

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1/13\\19/13\\-17/13\end{pmatrix}$.
- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Domanda [coodivettoreD] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$. Allora

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}4/13\\15/13\\-10/13\end{pmatrix}$.
- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}5\\9\\4\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Domanda [pianorA] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x+y+z=0$?

- ■ $\begin{cases} y-z=1 \\ x-y=0 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y=0 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Domanda [pianorB] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x+y-z=0$?

- ■ $\begin{cases} y+z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-z=0 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$

Domanda [`pianorC`] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y + z = 0$?

■ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x + z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Domanda [`pianorD`] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y - z = 0$?

■ $\begin{cases} x + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$