CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	20 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & h & h+4 & h \\ 2h+8 & h+4 & 0 & h+4 \\ h+6 & 4-h & 2h+8 & 4-h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 2+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, -4 \\ 2 \text{ se } h = 0 \\ 1 \text{ se } h = -4 \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{-4\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1: $h \neq 0, -4$.

   (d) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: La dimensione è 2; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

---

2. **8pt** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino π_1 di equazione cartesiana $x + y + z = 1$ e π_2 di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 4$.

   (a) Determinare la direzione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

   (b) Determinare l'intersezione P della retta r con il piano Oxz:

   (c) Determinare le intersezioni, Q_1 e Q_2, di π_1 rispettivamente con l'asse delle x e con l'asse delle y :

(d) Determinare la posizione reciproca della retta r e della retta s passante per Q_1 e Q_2.

$d = (-4, 1, 3)$;

$P = (-1, 0, 2)$;

$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

incidenti

---

3. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Determinare se A e B sono matrici simili, giustificando dettagliatamente la risposta.

Autovalori di A: 0 semplice, 2 doppio.

$$V_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = x + z = 0\right\},$$

$$V_2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2z + y = 0\right\};$$

A è diagonalizzabile, B no: NON SIMILI.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & h+3 & h-1 & -1 \\ 2h+6 & 0 & h+3 & 2h+6 \\ h+5 & 2h+6 & 5-h & h+5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h-1 \\ 1+h \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 1, -3 \\ 2 \text{ se } h = 1 \\ 1 \text{ se } h = -3 \end{cases}$$

(b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{-3\}$.

(c) Determinare per quali valori di h la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1: $h \neq 1, -3$.

(d) Sia $h = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

La dimensione è 2; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

2. **8pt** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino π_1 di equazione cartesiana $x - y + z = 1$ e π_2 di equazione cartesiana $-x + y + 2z = 3$.

(a) Determinare la direzione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

(b) Determinare l'intersezione P della retta r con il piano Oyz:

(c) Determinare le intersezioni, Q_1 e Q_2, di π_1 rispettivamente con l'asse delle x e con l'asse delle y :

(d) Determinare la posizione reciproca della retta r e della retta s passante per Q_1 e Q_2.

$$d = (1,1,0) \qquad P = (0,1/3,4/3) \qquad Q_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

parallele

---

3. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\1 & -1 & 1\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Determinare se A e B sono matrici simili, giustificando dettagliatamente la risposta.

Autovalori di A: 0 semplice, 1 doppio.

$$V_0 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x = y - z = 0\},$$
$$V_1 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x - y = y - z = 0\};$$

A NON è diagonalizzabile, B SI': NON SIMILI.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h+2 & h-2 & -1 & h+2 \\ 0 & h+2 & 2h+4 & 0 \\ 2h+4 & 6-h & h+4 & 2h+4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h-2 \\ h \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\mathrm{rg}\, A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 2, -2 \\ 2 \text{ se } h = 2 \\ 1 \text{ se } h = -2 \end{cases}$$

(b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

(c) Determinare per quali valori di h la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1: $h \neq 2, -2$.

(d) Sia $h = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

La dimensione è 2; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

2. **8pt** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino π_1 di equazione cartesiana $x - y + z = 2$ e π_2 di equazione cartesiana $4x + 2y - 3z = 1$.

(a) Determinare la direzione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

(b) Determinare l'intersezione P della retta r con il piano Oyz:

(c) Determinare le intersezioni, Q_1 e Q_2, di π_1 rispettivamente con l'asse delle x e con l'asse delle y :

(d) Determinare la posizione reciproca della retta r e della retta s passante per Q_1 e Q_2.

$d = (1, 7, 6)$;

$P = (0, -7, -5)$;

$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

incidenti

---

3. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Determinare se A e B sono matrici simili, giustificando dettagliatamente la risposta.

Autovalori di A: 0 semplice, -2 doppio.

$$V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x - y = x + z = 0\right\},$$

$$V_{-2} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x + 2y + z = 0\right\};$$

A è diagonalizzabile, B anche, con uguali autovalori e molteplicità corrispondenti: SIMILI.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & h-3 & h+1 & h+1 \\ 2h+2 & h+1 & 0 & 0 \\ h+3 & 7-h & 2h+2 & 2h+2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h-3 \\ h-1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq -1, 3 \\ 2 \text{ se } h = 3 \\ 1 \text{ se } h = -1 \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1: $h \neq 3, -1$.

   (d) Sia $h = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:
   La dimensione è 2; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino π_1 di equazione cartesiana $2x + y + z = 4$ e π_2 di equazione cartesiana $4x + 2y + 3z = 5$.

   (a) Determinare la direzione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

   (b) Determinare l'intersezione P della retta r con il piano Oyz:

   (c) Determinare le intersezioni, Q_1 e Q_2, di π_1 rispettivamente con l'asse delle x e con l'asse delle y :

(d) Determinare la posizione reciproca della retta r e della retta s passante per Q_1 e Q_2.

$$d = (-1, 2, 0) \qquad P = (0, 7, -3) \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

parallele

---

3. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Determinare se A e B sono matrici simili, giustificando dettagliatamente la risposta.

Autovalori di A: 0 semplice, -4 doppio.

$$V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - z = 3y - z = 0\right\},$$

$$V_{-4} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = y + z = 0\right\};$$

A NON è diagonalizzabile, B SI': NON SIMILI.
