CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**6 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & k^2 & k-1 \\ 5 & 5 & -5 & k+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare la distanza di Q da π:

   (d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**6 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -k & -1-k^2 & k+1 \\ 6 & -6 & 12 & k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

(c) Determinare la distanza di Q da π:

(d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**6 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2k & k^2 & k-1 \\ 5 & 5 & -5 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -10 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare la distanza di Q da π:

   (d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**6 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -k+1 & -2 & k+1 \\ 6 & -6 & 12 & k+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

(c) Determinare la distanza di Q da π:

(d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:
