CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & k^2 & k-1 \\ 5 & 5 & -5 & k+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
0	2	3	no	$\sharp$
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \ker A = 2$ per $k = 0, 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori: $-1, 0, 7$. $V_{-1} = \text{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $V_0 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix})$, $V_7 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix})$.

N esiste.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare la distanza di Q da π:

   (d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ z + 2y = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\pi\colon x - y + 2z = 2.$

$d(\pi, Q) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

$\pi'\colon x - y + 2z = 0.$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -k & -1-k^2 & k+1 \\ 6 & -6 & 12 & k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
5	2	2	sì	2
-1	2	3	no	$\sharp$
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq -1$,

$\dim\ker A = 3$ per $k \neq 5, -1$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori: 0 doppio, 5 semplice. $V_0 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $V_5 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix})$.

N non esiste, $B = \text{diag}(0, 0, 5)$.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare la distanza di Q da π:

   (d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \equiv \begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x + z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\pi\colon x - 4y - 2z = -5.$

$d(\pi, Q) = \dfrac{13\sqrt{21}}{21}.$

$\pi'\colon x - 4y - 2z = -5/2.$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2k & k^2 & k-1 \\ 5 & 5 & -5 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
3	2	3	no	$\sharp$
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 3$,

$\dim \ker A = 2$ per $k = 3$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -10 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori: 0 semplice, 2 doppio. $V_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $V_2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

N non esiste, $B = \text{diag}(0, 2, 2)$.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare la distanza di Q da π:

   (d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\pi\colon x + y + 2z = 4.$

$d(\pi, Q) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}.$

$\pi'\colon x + y + 2z = 3.$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

---

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -k+1 & -2 & k+1 \\ 6 & -6 & 12 & k+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
-2	2	2	sì	2
0	2	3	no	$\sharp$
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \ker A = 3$ per $k \neq 0, -2$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori: $-2, 0, 5$. $V_{-2} = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$, $V_0 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$, $V_5 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix})$.

N esiste.

---

3. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P e Q di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta $r = PQ$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare la distanza di Q da π:

   (d) Determinare l'equazione del piano π' parallelo a π equidistante da P e Q:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \equiv \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + z = 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\pi\colon x - 3y - 2z = -6.$

$d(\pi, Q) = \dfrac{9\sqrt{14}}{14}.$

$\pi'\colon x - 3y - 2z = -4.$
