**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
|---|---|
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

$$\pi : 2x + 4y + z = 4, \qquad r = t\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{4}{21}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi) = d(O,Q) = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k+2 & k+1 & k-2 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k-2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | $\dim S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | sì | 2 |
| 3 | 2 | 3 | no | |
| resto | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0,3 \\ 2 \text{ se } k = 0,3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 3$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 0, 3$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad s\,,t \in \mathbb{R}.$$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$\lambda_1 = 0$ semplice; $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = m_2 = 2$. Semidefinita positiva.

$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

---

**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
| --- | --- |
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

$\pi : 6x + 2y + z = 6, \qquad r = t\begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix},$

$Q = \frac{6}{41}\begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad d(O, \pi) = d(O, Q) = \frac{6}{\sqrt{41}}$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k & 0 & k \\ 0 & 2-2k & 1-k & 1-k \\ -2k & k & k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| (-2 | 3 | 3 | sì | 1) |
| 0 | 2 | 2 | sì | 2 |
| 1 | 2 | 3 | no | |
| resto | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s\,, t \in \mathbb{R}.$$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$\lambda_1 = 0$ semplice; $\lambda_2 = -10$, $\mu_2 = m_2 = 2$. Semidefinita negativa.

$$N = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
|---|---|
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

$\pi : 3x + y + 3z = 9, \qquad r = t\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},$

$Q = \frac{9}{19}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi) = d(O,Q) = \frac{9}{\sqrt{19}}$

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix}2-k & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1-k & -1 & 1\\ 2-k & 3 & k+2 & -k-1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-k\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| -3 | 2 | 3 | no | |
| 0 | 2 | 2 | sì | 2 |
| resto | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A)=\begin{cases}3 \text{ se } k\neq -3,0\\ 2 \text{ se } k=-3,0.\end{cases}$$

Risolubile per $k\neq -3$,

$\dim \mathrm{Sol}=2$ per $k=0$.

Soluzione per $k=0$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix},\qquad s\,,t\in\mathbb{R}.$$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&-2&0\\3&0&3\end{pmatrix};\qquad \text{sia inoltre } X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X)=X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X=NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X})=0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$\lambda_1=$ 6 semplice; $\lambda_2=$ 0, $\mu_2=m_2=1$; $\lambda_3=$ -2 , $\mu_3=m_3=1$. Indefinita.

$$N=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0\\0&0&1\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\end{pmatrix},\qquad \overline{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

---

**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

$$\pi : 2x + 4y + z = 8, \qquad r = t\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{8}{21}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi) = d(O,Q) = \frac{8}{\sqrt{21}}$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 3k-5 & 0 & k \\ 0 & 10-2k & 5-k & 5-k \\ 2k & k & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}2\\3\\k+2\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 2$.

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | no | |
| ( 2 | 3 | 3 | sì | 1 ) |
| 5 | 2 | 3 | no | |
| resto | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 5 \\ 2 \text{ se } k = 0, 5. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0, 5$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 0, 5$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 19 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$\lambda_1 = 20$ semplice; $\lambda_2 = 10$, $\mu_2 = m_2 = 2$. Definita positiva.

$$N = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{non esiste } \overline{X}.$$

---