

Geometria e Algebra Appello del 22 gennaio 2018

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

.....

.....

Domanda [openquestdefmixA] Dare la **definizione** di matrice quadrata $n \times n$ diagonalizzabile.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestdefmixB] Sia A una matrice $n \times n$. Dare la **definizione** di autovettore di A .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestdefmixE] Dare la **definizione** di matrici simili.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestdefmixF] Dare la **definizione** di autovalore di una matrice quadrata $n \times n$.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasisE] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista di generatori di \mathbb{R}^3 che sia formata da 6 vettori distinti.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasisF] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista di 4 vettori distinti che non è un sistema di generatori di \mathbb{R}^2 .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasisG] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di un vettore $X \in \mathbb{R}^4$ tale che la lista $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X \right\}$

sia linearmente dipendente.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasisH] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista di 3 vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ in \mathbb{R}^4 tali che $\{v_1, v_2\}$ siano indipendenti, ma $\{v_1, v_2, v_3\}$ siano dipendenti.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [invertibiliA] ♣ Sia $A = (A^1|A^2|X)$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Se $\det A = 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- $X \in \text{Span}(A^1, A^2)$. A è una matrice invertibile.
 Non si può determinare $\det(A^1|A^2|7X)$. $x_1 = 0$.

Domanda [invertibiliB] ♣ Sia $A = (A^1|A^2|X)$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Se $\det A \neq 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- Esiste una matrice B tale che $AB = I_3$. $x_3 \neq 0$.
 I vettori $\{A^1, A^2, X\}$ sono linearmente indipendenti. $X \in \text{Span}(A^1, A^2)$.

Domanda [invertibiliC] ♣ Sia A una matrice 3×3 e siano A^1, A^2, A^3 le colonne di A . Se $\det A = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- $\{A^1, A^2, A^3\}$ è una base di \mathbb{R}^3 . La matrice $(2A^1|A^2|A^3)$ è invertibile.
 I vettori $\{2A^1, 3A^2, 2A^3\}$ sono linearmente dipendenti. $\det(3A^1|A^2| - 2A^3) = 0$.

Domanda [invertibiliD] ♣ Sia A una matrice 3×3 e siano A^1, A^2, A^3 le colonne di A . Se $\det A = 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- I vettori $\{A^1, A^2, A^3\}$ sono linearmente indipendenti. I vettori $\{A^1 + A^2, A^2, A^3\}$ sono linearmente dipendenti.
 È impossibile calcolare $\det(A^1 + A^2|A^2|A^3)$. $\det(A^1| - A^2|2A^3) = 0$.

Domanda [quadfalgmultA] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^2 *definita* positiva:

- $q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy$ $q(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$
 $q(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$ $q(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 10xy$

Domanda [quadfalgmultB] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^2 *semidefinita* positiva:

- $q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy$ $q(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$
 $q(x, y) = x^2 + 4y^2$ $q(x, y) = 4x^2 + 2xy$

Domanda [quadfalgmultC] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^2 *definita* negativa:

- $q(x, y) = -x^2 - y^2 - 4xy$ $q(x, y) = -3x^2 - 3y^2 + 4xy$.
 $q(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$ $q(x, y) = -2y^2 - 2xy$

Domanda [quadfalgmultD] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^3 *semidefinita* negativa:

- $q(x, y) = -x^2 - y^2 - xy$ $q(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{2}xy$
 $q(x, y) = -x^2 - y^2 + 2xy$ $q(x, y) = -2x^2 - 4xy$

Domanda [quadfalgmultE] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^3 indefinita:

$q(x, y) = x^2 + 4y^2 + 8xy$

$q(x, y) = -x^2 - 2y^2 - 4xy$

$q(x, y) = -x^2 - y^2 + xy$

$q(x, y) = -2x^2 - 2xy$

Domanda [coordBasisA] Quali fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di \mathbb{R}^3 : $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Domanda [coordBasisB] Quali fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di \mathbb{R}^3 : $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [coordBasisC] Quali fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di \mathbb{R}^3 : $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [coordBasisD] Quali fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di \mathbb{R}^3 : $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Domanda [pianobA] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi: x - y + z = 0$?

$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Domanda [pianobB] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi: x + y + z = 0$?

$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Domanda [pianobC] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi: x - y - z = 0$?

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$
 $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Domanda [pianobD] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi: x - y + z = 0$?

$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Domanda [baseortogA] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortogonale** di \mathbb{R}^3 ?

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Domanda [baseortogB] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortonormale** di \mathbb{R}^3 ?

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Domanda [baseortogC] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortogonale** di \mathbb{R}^3 ?

$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Domanda [baseortogD] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortonormale** di \mathbb{R}^3 ?

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Domanda [thspetra] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3 . Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A , e che per l'autospazio $V_4 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + 3I)$.
 Le colonne di A formano una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .
 $A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-3}$.

Domanda [thspetrB] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3 . Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A , e che per l'autospazio $V_4 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\text{tr } A = -2$.

A non è invertibile.

$V_{-3} = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Domanda [thspetrC] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3 . Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A , e che per l'autospazio $V_4 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}$.

Esiste una base ortogonale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di A .

$A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\det A = -12$.

Domanda [thspetrD] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3 . Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A , e che per l'autospazio $V_4 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$V_{-3} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

$A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Le colonne di A formano una base ortogonale di \mathbb{R}^3 .

$\text{tr } A = 1$.