CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-k & -2 & -1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1 \\ -1 & -2 & k-1 & k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
-1	2	2	sì	2
2	2	3	no	
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -1, 2 \\ 2 \text{ se } k = -1, 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 2$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq -1 \wedge 2$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\\3\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix}$. $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$. $A = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane e una base di $\operatorname{Ker} L$

$$\operatorname{Ker} A = \{2x - 3y = 4y + t = z = 0\} = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}-3/8\\-1/4\\0\\1\end{pmatrix})$$

(d) Dire se L è suriettiva, altrimenti determinare una base di $\operatorname{Im} L$. L è suriettiva.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m. A: $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 2$, $m_1 = 2$; $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = m_2 = 1$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1} \colon \{2x - 2y - z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2} \colon \{x + y = x - z = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\}.$$

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

$$B = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-3 & k-4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ k+4 & 8 & 4-k & k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
4	2	3	no	
-5	2	3	no	
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 4, -5 \\ 2 \text{ se } k = 4, -5. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 4, -5$,

$\dim \operatorname{Sol} = 1$ per $k \neq 4, -5$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 9/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

2. **(8pt)** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\6\\6\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\3\\6\end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$. $L\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\7\\7\end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\2 & 1 & -1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

(c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} L$.
L è iniettiva.

(d) Determinare una base di $\operatorname{Im} L$ e delle equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L$.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = \{x + 2y - t = 0\}. \text{ B. altern.: } \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -6 & -3\\0 & -4 & -4\\-1 & -2 & -5\end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

$$A\colon \lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 2,\ m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = -8,\ \mu_2 = m_2 = 1$$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1}\colon \{x - 3y = y + z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2}\colon \{x - y = x - z = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \left\{\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

$$B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k & 1 \\ -2 & 1 & 1+k & -1 \\ -k-1 & -1 & -2 & -k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
1	2	3	no	
- 2	2			
resto	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, -2 \\ 2 \text{ se } k = 1, -2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 1, -2$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

2. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\12\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix}$. $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\\12\end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$.

$$A = \begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 2\\1 & 1 & 1 & 1\\2 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

(c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} L$.

$$\operatorname{Ker} A = \{x + y + z + t = -2y + z + 2t = 0\} = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}-3/2\\1/2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix})$$

(d) Dire se L è suriettiva, altrimenti determinare una base di $\operatorname{Im} L$. L non è suriettiva. Una base di $\operatorname{Im} L$ è data da $\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\}$. o $\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\-2 & 0 & 2\\-1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.
A: $\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = 2$, $m_1 = 2$; $\qquad \lambda_2 = 0$, $\mu_2 = m_2 = 1$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1} : \{x + 2y - z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2} : \{x - z = 2x - y = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}.$$

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

$$B = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\4 & 4 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k-4 & 1 \\ 4-k & 4-k & k+4 & -k+4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-4	2	3	no	–
5	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq -4 \wedge 5$.

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per ogni $k \neq -4 \wedge 5$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = +t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

---

2. **(8pt)** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$. $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\\4\end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$. $A = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

(c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} L$.

$$\operatorname{Ker} A = \{2x + y = 4y + z = 0\} = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}1\\-2\\8\end{pmatrix})$$

(d) Determinare una base di $\operatorname{Im} L$ e delle equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L$.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}) = \{y - z = x - t = 0\}.$$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}9 & 0 & -1\\ -6 & 4 & -2\\ -3 & -4 & 3\end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

A: $\lambda_1 = 8$, $\mu_1 = 2$, $m_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = m_2 = 1$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1}\colon \{ = x - z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2}\colon \{6x - y = 9x - z = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \{\begin{pmatrix}1\\6\\9\end{pmatrix}\}.$$

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

$$B = \begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
