CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**21 settembre 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & -h \\ -2h & h-1 & -1+h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \text{se } h \neq -1 \\ 1 & \text{se } h = -1 \end{cases}$$

(b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq -1$

(c) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1: $h \neq -1$

(d) Sia $h = 1$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$r: \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y - z = 1. \end{cases}$$

(b) una rappresentazione cartesiana del piano π che contiene r e passante per l'origine O; $\pi: 2x - 3y + 4z = 0$

(c) la distanza di Q da π; $d_{\pi Q} = \dfrac{3\sqrt{29}}{29}$

(d) l'intersezione di r con il piano coordinato xOy. $P = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

3. **(8pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

$$\lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 2,\ m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = -3,\ \mu_2 = m_2 = 1$$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1} \colon \{y = z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2} \colon \{5x + y = y + z = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\}.$$

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta. Le due matrici non sono simili. Infatti A non è diagonalizzabile, mentre B è simmetrica, dunque diagonalizzabile.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**21 settembre 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & h+1 \\ -2h & h-1 & -h-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 & \text{se } \ h = 0, -1 \\ 2 & \text{se } \ h \neq 0, -1 \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 0$

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà soluzione ha dimensione 1: $h \neq 0, -1$

   (d) Sia $h = 1$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$r: \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x - z = 1. \end{cases}$$

   (b) una rappresentazione cartesiana del piano π che contiene r e passante per l'origine O; $\pi : 5x - y - z = 0$

   (c) la distanza di Q da π; $d_{\pi Q} = \dfrac{7\sqrt{3}}{9}$

   (d) l'intersezione di r con il piano coordinato xOz. $P = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -5/2 \end{pmatrix}$

---

3. **(8pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

$$\lambda_1 = -1,\ \mu_1 = 2,\ m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 2,\ \mu_2 = m_2 = 1$$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1} \colon \{x = 4y + 3z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2} \colon \{x = y = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta. Le due matrici non sono simili. Infatti A non è diagonalizzabile, mentre B è simmetrica, dunque diagonalizzabile.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**21 settembre 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 2+h & h \\ 2 & 2+h & h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 2 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 2$

(c) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1: $h \neq 2$

(d) Sia $h = 0$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$r: \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - z = 2. \end{cases}$$

(b) una rappresentazione cartesiana del piano π che contiene r e passante per l'origine O; $\pi: 4x + 2y + 2z = 0$

(c) la distanza di Q da π; $d_{\pi Q} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(d) l'intersezione di r con il piano coordinato xOy. $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

3. **(8pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

$$\lambda_1 = 2,\ \mu_1 = m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = -1,\ \mu_2 = 2,\ m_2 = 1$$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1} : \{y = z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2} : \{3x - y = z = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta. Le due matrici non sono simili. Infatti A non è diagonalizzabile, mentre B è simmetrica, dunque diagonalizzabile.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**21 settembre 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 2+h & 2 \\ 2 & 2+h & h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 1 & \text{se } \ h = 2, -2 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq -2$

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà soluzione ha dimensione 1: $h \neq 2, -2$

   (d) Sia $h = 0$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2z = 7 \end{cases}$$

   (b) una rappresentazione cartesiana del piano π che contiene r e passante per l'origine O; $\pi: 4x - 7y - 2z = 0$

   (c) la distanza di Q da π; $d_{\pi Q} = \dfrac{5\sqrt{69}}{69}$

   (d) l'intersezione di r con il piano coordinato yOz. $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

---

3. **(8pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

$$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 2,\ m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = -1,\ \mu_2 = m_2 = 1$$

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

$$V_{\lambda_1} \colon \{x = 2y - z = 0\}; \qquad V_{\lambda_2} \colon \{x = y = 0\}.$$

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$\mathcal{B}_{V\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{B}_{V\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta. Le due matrici non sono simili. Infatti A non è diagonalizzabile, mentre B è simmetrica, dunque diagonalizzabile.