CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	7 luglio 2017
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 & k+3 \\ 4k-9 & 2k-3 & 4k-12 & 6k-15 \\ k-3 & 3 & -k & 3-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 6k-12 \\ k \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi \colon 2x - y - 3z = 1$ determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

   (b) il punto di intersezione H di r con π;

   (c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;

   (d) la distanza di B da π.

---

3. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

   (c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

   (d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	7 luglio 2017
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:
$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & k-2 & 2k-2 \\ 4k-1 & 2k-1 & 4k & 2-4k \\ k & -1 & 1-k & 3-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k-1 \\ 2k-1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi\colon 2x - 2y - z = 1$ determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

   (b) il punto di intersezione H di r con π;

   (c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;

   (d) la distanza di B da π.

---

3. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(b) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(c) Esiste una base <u>ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 luglio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 & k-3 \\ 4k-9 & 2k-3 & 4k-12 & 9-4k \\ k-3 & 3 & -k & 3-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 3k-6 \\ 3k-6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi\colon x + 3y - z = 1$ determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

   (b) il punto di intersezione H di r con π;

   (c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;

   (d) la distanza di B da π.

---

3. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 luglio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 4-7k & 2k & 3k+4 & -4-k \\ k-4 & 0 & k-4 & 4-k \\ 3k & 4-2k & 4-3k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3k-4 \\ 4 \\ 8-3k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi\colon 3x + 2y + z = 1$ determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

(b) il punto di intersezione H di r con π;

(c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;

(d) la distanza di B da π.

---

3. **(6 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(b) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(c) Esiste una base <u>ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta.