CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 luglio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 & k+3 \\ 4k-9 & 2k-3 & 4k-12 & 6k-15 \\ k-3 & 3 & -k & 3-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 6k-12 \\ k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-3	2	2	sì	2
0	2	2	sì	2
3	2	2	sì	2
resto	3	3	sì	1

$$(a) \qquad \text{rg}\, A = \begin{cases} 2 & \text{se } \ k = -3, 0, 3 \\ 3 & \text{se } \ k \neq -3, 0, 3 \end{cases}$$

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(c) Per $k = -3, 0, 3$.
(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi\colon 2x - y - 3z = 1$ determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$2x + y - 4 = y - z - 1 = 0$$

(b) il punto di intersezione H di r con π; $(7/5, 6/5, 1/5)$

(c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;
$x = 7/5 + 2t, y = 6/5 - t, z = 1/5 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$

(d) la distanza di B da π. $(3/7)\sqrt{14}$

---

3. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche: 2 con molteplicità 2 e -3 con molteplicità 1.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

$$V_2 = \{x + y = 0\} \qquad V_{-3} = \{4x - y = 0, z = 0\}.$$

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta. Sì, la matrice è diagonalizzabile.

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta. No, le molteplicià geometriche sono diverse. A è diagonalizzabile, B no.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 luglio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & k-2 & 2k-2 \\ 4k-1 & 2k-1 & 4k & 2-4k \\ k & -1 & 1-k & 3-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k-1 \\ 2k-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
1	2	3	no	
resto	3	3	sì	1

$$(a) \qquad \text{rg}\, A = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0, 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 0, 1 \end{cases}$$

(b) Per $k \neq 1$.
(c) Per $k \neq 0, 1$.
(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi \colon 2x - 2y - z = 1$ determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$2x + z - 4 = x + y - z - 1 = 0$$

(b) il punto di intersezione H di r con π; $(3/2, 1/2, 1)$

(c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;

$x = 3/2 + 2t, y = 1/2 - 2t, z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$.

(d) la distanza di B da π. $(5/3)$.

---

3. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche: $-6, -2, -1$

(b) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$V_{-6} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_{-2} = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_{-1} = \text{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Esiste una base <u>ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta. No, la matrice non è simmetrica. Ogni base formata di autovettori è formata da multipli dei vettori sopra che non sono ortogonali

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta. Sì, hanno gli stessi autovalori e sono entrambe diagonalizzabili.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	7 luglio 2017
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 & k-3 \\ 4k-9 & 2k-3 & 4k-12 & 9-4k \\ k-3 & 3 & -k & 3-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 3k-6 \\ 3k-6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
3	2	3	no	
resto	3	3	sì	1

$$(a) \qquad \operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0, 3 \\ 3 & \text{se } k \neq 0, 3 \end{cases}$$

(b) Per $k \neq 3$.
(c) Per $k \neq 0, 3$.
(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi \colon x + 3y - z = 1$ determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$x + y - 1 = 2y + z + 1 = 0$$

(b) il punto di intersezione H di r con π; $(5/4, -1/4, -1/2)$

(c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;
$x = 5/4 + t, y = -1/4 + 3t, z = -1/2 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$

(d) la distanza di B da π. $(3/11)\sqrt{11}$

---

3. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche: 3 con molteplicità 2 e -2 con molteplicità 1.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

$$V_3 = \{x + 4y = 0\} \qquad V_{-2} = \{x - y = 0, z = 0\}.$$

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta. Sì, la matrice è diagonalizzabile.

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta. Sì

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 luglio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 4-7k & 2k & 3k+4 & -4-k \\ k-4 & 0 & k-4 & 4-k \\ 3k & 4-2k & 4-3k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3k-4 \\ 4 \\ 8-3k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$$(a) \qquad \operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 & \text{se } \ k = 4 \\ 2 & \text{se } \ k = 0 \\ 3 & \text{se } \ k \neq 0, 4 \end{cases}$$

(b) Per $k \neq 4$.
(c) Per $k = 0$.
(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano $\pi \colon 3x + 2y + z = 1$ determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana della retta $r = AB$;

$$x + y - 2 = x - 2z - 1 = 0$$

(b) il punto di intersezione H di r con π; $(-5/3, 11/3, -4/3)$

(c) una rappresentazione parametrica della retta s passante per H e ortogonale a π;

$x = -5/3 + 3t, y = 11/3 + 2t, z = -4/3 + t, \quad t \in \mathbb{R}$.

(d) la distanza di B da π. $(1/2)\sqrt{14}$

---

3. **(6 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche: $-1, 2, 4$

(b) Determinare una base di ciascun autospazio di A. $V_2 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_{-1} = \text{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $V_4 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Esiste una base <u>ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta. No, la matrice non è simmetrica. Ogni base formata di autovettori è formata da multipli dei vettori sopra che non sono ortogonali

(d) A e B sono simili? Motivare la risposta. Sì, hanno gli stessi autovalori e sono entrambe diagonalizzabili.
