CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 giugno 2017
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & 2 \\ 1-h & 2h & 1-2h \\ 1+h & -h & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2h+2 \\ 1 \\ 1+h \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 0 \\ 2 & \text{se } h = -3 \\ 3 & \text{se } h \neq 0, -3 \end{cases}$$

(b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq -3$

(c) Determinare per quali valori di h la soluzione esiste ed è unica: $h \neq 0, -3$

(d) Sia $h = 0$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 3t^2 + 2xy$.

(a) Scrivere la matrice associata a q.

(b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(d) Discutere il segno di q.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; q(x', y', z', t') = 2(x')^2 + 2(z')^2 + 3(t')^2, \text{ semidef. positiva,}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_4$ con $\lambda = 1$, $\qquad \boldsymbol{u}_2$ con $\lambda = 3$.

(b) Determininare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

$p_A(t) = -t^3+3t^2+t-3 = -(t+1)(t-1)(t-3)$. Autovalori:

λ	$\mu(\lambda)$	$m(\lambda)$
-1	1	1
1	1	1
3	1	1

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$B_{-1} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad B_3 = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.
N esiste perché A è diagonalizzabile.
Una scelta di N è la seguente:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+h & 1-h \\ h & 2h & -h \\ 0 & 2-h & h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2h \\ 6+h \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \text{se } \ h = 0, 3 \\ 3 & \text{se } \ h \neq 0, 3 \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 0$

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà soluzione ha dimensione 1: $h = 3$

   (d) Sia $h = 3$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 3t^2 + 4xy$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \; q(x', y', z', t') = 6(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - 3(t')^2, \text{ non definita}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}_1$ con $\lambda = 2$, $\boldsymbol{u}_3$ con $\lambda = 1$.

(b) Determinare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

$p_A(t) = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 = -(t-1)^2(t-2)$. Autovalori:

λ	$\mu(\lambda)$	$m(\lambda)$
1	2	1
2	1	1

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$B_1 = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \qquad B_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

N non esiste perché A non è diagonalizzabile.

$B = \operatorname{diag}(1, 1, 2)$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 giugno 2017
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 3-h & 2h-6 & 4-h \\ 0 & h-3 & 2 \\ 3-h & 3-h & h-2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2h-4 \\ h-2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 3 \\ 2 & \text{se } h = 0 \\ 3 & \text{se } h \neq 0, 3 \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 0$

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione esiste ed è unica: $h \neq 0, 3$

   (d) Sia $h = 3$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2tz$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $q(x', y', z', t') = (x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 + (t')^2$, positiva

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}_1$ u_4 con $\lambda = 1$, $\quad$ $\boldsymbol{u}_2$ con $\lambda = 2$.

(b) Determininare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

$p_A(t) = -t^3 + 7t - 6 = -(t+3)(t-1)(t-2)$. Autovalori:

λ	$\mu(\lambda)$	$m(\lambda)$
-3	1	1
1	1	1
2	1	1

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$$B_{-3} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}\}, \qquad B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad B_2 = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.
N esiste perché A è diagonalizzabile.
Una scelta di N è la seguente:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -11 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6-h & h-2 \\ h-6 & h-6 & 12-2h \\ -4 & h-4 & 8-h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+h \\ 3-2h \\ 2-3h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 0, 6 \\ 3 & \text{se } h \neq 0, 6 \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 6$

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà soluzione ha dimensione 1: $h = 0$

   (d) Sia $h = 0$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = -3x^2 - y^2 - z^2 - 4t^2 - 4tz$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \; q(x', y', z', t') = -3(x')^2 - (y')^2 - 5(z')^2, \text{ semidef. negativa,}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}_2$ con $\lambda = 2$, $\boldsymbol{u}_4$ con $\lambda = 3$.

(b) Determinare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

$p_A(t) = -t^3+7t^2-16t+12 = -(t-2)^2(t-3)$. Autovalori:

λ	$\mu(\lambda)$	$m(\lambda)$
2	2	1
3	1	1

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

$B_2 = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $B_3 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

N non esiste perché A non è diagonalizzabile.
$B = \mathrm{diag}(2, 2, 3)$.